Η Λογαριθμική Συνάρτηση

(Εξισώσεις – Ανισώσεις – Συστήματα)

Θυμηθείτε...		
$\log_a : (0,+\infty) \to R : x \to y = \log_a x\,,\ 0 < \alpha \neq 1$ όπου y η μοναδική λύση της εξίσωσης: $a^y=x$ $(0<a\neq 1)$		Ειδική περίπτωση Νεπέριος – Δεκαδικός Λογάριθμος (2<e<3)
$\log_a x=y \Leftrightarrow a^y=x$ με $x>0$, $0<a\neq 1$	$\log_\beta x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \beta}$ με $x>0$, $0<a,\neq 1$	$\ln x=y \Leftrightarrow e^y=x$ $\log x=y \Leftrightarrow 10^y=x$ με $x>0$
$\log_a a=1$, $\mathrm{Log}_a 1=0$ με $0<a\neq 1$	$\log_a \beta = \dfrac{1}{\log_\beta \alpha}$ με $0<a,\beta\neq 1$	$\ln e=1$, $\ln 1=0$ $\log 10=1$, $\log 10=0$
$a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x=x$ με $x>0$, $0<a\neq 1$	Αν $a>1$ τότε η $f(x)=\log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα δηλ $0<x_1<x_2 \Rightarrow \log x_1<\log x_2$	$e^{\ln x}=x$, $\ln e^x=x$ $10^{\log x}=x$, $\log 10^x x$ με $x>0$
$\log_a(xy)= \log_a x+ \log_a y$ με x , $y>0$, $0<a\neq 1$	Αν $0<a \neq 1$ τότε η $f(x)=\log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα δηλ $0<X_1<x_2 \Rightarrow \log x_1>\log x_2$	$\ln(xy)=\ln x+\ln y$ $\log(xy)=\log x+\log y$ με x , $y>0$
$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ με x , $y>0$, $0<a\neq 1$	Η $f(x)=\log_a x$ είναι «1-1» δηλ. $0<x_1=x_2 \Leftrightarrow \log x_1=\log x_2$	$\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ με x , $y>0$
$\log_a x^k = k\cdot\log_a x$, $k\in R$ με $x>0$, $0<a\neq 1$	Είναι αντίστροφη με την $f(x)=a^x$ (συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$)	$\ln x^k = k\cdot\ln x$, $k\in R$ με $x>0$
$\log_a \sqrt[\nu]{x^\mu} = \dfrac{\mu}{\nu}\cdot\log_a x$ με $x>0$, $0<a\neq 1$	$a^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta a}$ $0<a,\beta,\gamma\neq 1$	$\ln \sqrt[\nu]{x^\mu} = \dfrac{\mu}{\nu}\cdot\ln x$ με $x>0$

Σχόλια :

1. Η εξίσωση $\log_\alpha f(x)=k$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $f(x)=\alpha^k$, με τον περιορισμό $f(x)>0$.
2. Αν η εξίσωση είναι της μορφής $f(\log_\alpha x)=0$ μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό $y=\log_\alpha x$, οπότε η εξίσωση γίνεται: $f(y)=0$
3. Η εξίσωση $\log_{\alpha(x)}f(x)=\log_{\alpha(x)}g(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=g(x)$ και τους περιορισμούς $0<\alpha(x)\neq 1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$
4. Αν η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε περιέχει λογαρίθμους με διαφορετικές βάσεις, τότε συνήθως μετατρέπουμε τους λογαρίθμους αυτούς στην ίδια βάση.

   Αντίστοιχα και για τις ανισώσεις (προσοχή στην μονοτονία των συναρτήσεων)

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$f(x)=\log_2(1-x)$	$f(x)=\log_x(1-x^2)$	$f(x)=\log_{x^2-1}(1-x)$
$f(x)=\dfrac{1}{\log^2 x-3\log x+2}$	$f(x)=\dfrac{1}{2\lvert\log x\rvert-1}$	$f(x)=\sqrt{1-\lvert\log x\rvert}$
$f(x)=\sqrt{2\log^2 x+\log x-3}$	$f(x)=\log[1-\sqrt{x}]$	$f(x)=\sqrt{\log^3 x-3\log x+2}$
$f(x)=\ln(5x-x^2-6)$	$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x+1}$	$\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
$f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$	$f(x)=\sqrt{\ln x-1}$	$f(x)=\sqrt{\ln[\ln(\ln x)]}$

2. Στην παράσταση $K=\log\sqrt{\dfrac{3\cdot a^2\cdot\sqrt[4]{\beta^2\cdot\gamma}}{5\cdot\beta^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\beta\cdot\gamma}}}$ να εφαρμόσετε όλες τις δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων.

3. Αποδείξτε ότι: $\dfrac{7}{16}\cdot\log(3+2\sqrt{2})-4\cdot\log(\sqrt{2}+1)=\dfrac{25}{8}\cdot\log(\sqrt{2}-1)$

4. Αν α , β>1 να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K = \log(a^2 - 1) + \log(\beta^2 - 1) - \log[(ab+1)^2 - (a+\beta)^2]$$

5. Δίνεται η ακολουθία (a_ν) με $a_\nu = \log 3^\nu$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος. Βρείτε το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της.

6. Αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι lnα και ο δεύτερος όρος της lnβ (με α , β>0). Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μετά τον a_ν είναι $S = \sqrt{\dfrac{\beta^{\nu^2}}{\alpha^{\nu(\nu-2)}}}$.

7. Αν χ , ψ , ω είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου (δηλ. ακολουθίας που οι αντίστροφοι των όρων της αποτελούν αριθμητική πρόοδο), να δείξετε: log(x+ψ)+log(x-2ψ+ω)=2log(x-ω)

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$\frac{1}{2}\log(x+2) + \log\sqrt{x-3)} = 1 + \log\sqrt{3}$	$\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$
$\log(x+1) + 2\cdot\log\sqrt{5x} = 2$	$\log_{\sqrt{2}}(2\cdot\log_4 x\cdot\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x) = 6$
$\log(x+1) + 2\cdot\log\sqrt{5x} = 2$	$\frac{1}{3}\cdot\log(x-2) + \log\sqrt{4x+3} = \frac{2}{3}$
$\log\frac{2x}{3} + \log(\frac{5x}{4}+2) = 2\cdot\log(x-1)$	$\log[\log(2x^2+x-11)] = 0$
$\frac{\log x}{\log x+2} + \frac{\log x+3}{\log x-1} = \frac{11}{2}$	$\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$
$2\cdot\log_x^2 8 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$	$\log_x\sqrt[3]{625} - \log_x\sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0$
$\log(2^x + 2\cdot 3^x) + \log 81 = x\cdot\log 3 + \log 178$	$\log_2 x + \log_3 x = \log_3 2\cdot\log_2 36$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

log[log(logx)]<0	ln[ln(lnx)] $\leq$ 0
$\log\sqrt{x} \geq \sqrt{\log x}$	$\ln^4 x - 5\ln^2 x + 4 \leq 0$
$\log x^2 < (\log x)^2$	$\ln^3 x - 6\ln^2 x + 11\ln x - 6 < 0$
$\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x-1) > 0$	$\dfrac{1-\log x+\log(x+3)}{1-\log x} \geq 2$
$\dfrac{\log(x^2-4x+3)-1}{\sqrt{x-2}+2} < 0$	$2\cdot\log_2 x - 3\cdot\log_3 x \leq 4$
$\sqrt{\ln x} - 1 \leq 0$	$\dfrac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1$ με $0 < \alpha < 1$

9. Να λύσετε τα συστήματα :

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \log x - 2\log y + \log 2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2\ln x + \ln y - 4 = 0 \\ \ln x - 2\ln y + 3 = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \log(xy) = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3\log^2 2 \end{cases}$	$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ xy = 5^{12} \end{cases}$
$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln x^2 + \ln y^2 = \ln 32 \end{cases}$	$\begin{cases} x^{\log y} = 4 \\ xy = 40 \end{cases}$
$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \log y = 2\log x \\ xy = 8 \end{cases}$
$\begin{cases} \lvert x-2 \rvert > 1 \\ \log_x x > x \end{cases}$	$\begin{cases} \log_x(\log_2 x) > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4x+3} < 0 \end{cases}$

10. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και από το διάγραμμά τους να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας τους , τα ακρότατά τους , τα σημεία τομής με τους άξονες και το σύνολο τιμών τους.

f(x)=lnx+1	f(x)=ln(x+1)	f(x)=ln(x-2)+1
f(x)=- lnx	f(x)=| lnx |	f(x)=ln|x|