

Ασκήσεις στην εφαπτομένη καμπύλης



1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{2}{x}$ στο σημείο της που έχει τετμημένη 2.
2. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ η εφαπτομένη της είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση (δ): $x - 3y + 15 = 0$;
3. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 1$, η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/4$; Υπολογίστε στην συνέχεια το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη αυτή με τους άξονες.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του a ώστε στα σημεία της γραφικής παράστασης της f που έχουν τετμημένες $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.
5. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + ax + \beta$ στο σημείο $M(0,1)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° , να βρείτε τα a , $\beta \in \mathbb{R}$.
6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = \ln x$, που περνά από το σημείο $A(-1,0)$.

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=-x^3$ και $g(x)=2x^2+x$. Να αποδείξετε ότι σε ένα από αυτά έχουν κοινή εφαπτομένη
8. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3x-1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+x$. Ποιο είναι το σημείο επαφής τους ;

Ασκήσεις στο ρυθμό μεταβολής

1. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a , όταν $a=5$ cm.
2. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις x , y και περίμετρο 20 cm. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν $x=5$ cm.
3. Αν η μία πλευρά ορθογωνίου είναι διπλάσια της άλλης, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του όταν το εμβαδόν του είναι $E=8$ m².
4. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(2t-1, t+2)$ και $B(t+2, 2t+1)$, όταν $t=3$.
5. Η ένταση του φωτός σε βάθος x m από την επιφάνεια του νερού δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 16 \cdot e^{-\frac{x^2+1}{2x}}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του φωτός σε βάθος $x=4$ m.

6. Μεταβλητή ευθεία (ϵ): $y=\lambda x+\beta$ περνά από το σημείο $A(1,3)$ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy στα σημεία M , N αντίστοιχα. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMN , την χρονική στιγμή που η (ϵ) είναι παράλληλη στην διχοτόμο του δεύτερου τεταρτημορίου.

➔ Ασκήσεις στην κίνηση υλικού σημείου

1. Η θέση ενός υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή t , δίνεται από τη σχέση $S(t)=t^3+t+1$, $t \geq 0$
 - I) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $[1,3]$
 - II) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή $t=2$ sec
2. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και η θέση του δίνεται από τη σχέση $S(t)=t^3-30t^2+288t+21$ όπου ο χρόνος t είναι σε sec και το S σε m.
 - I) Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του την χρονική στιγμή t .
 - II) Πότε το κινητό κινείται στην θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση ; Πότε είναι ακίνητο ;
 - III) Να βρείτε την επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα 15 m/sec.
 - IV) Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό κατά τη διάρκεια των πρώτων 15 sec.
 - V) Πόσο μετατοπίστηκε τα 15 πρώτα sec ;

Προβλήματα ακροτάτων

1. Να βρείτε το σημείο M της ευθείας $y=2x$ που απέχει από το $A(5,0)$ τη μικρότερη απόσταση.
2. Βρείτε το σημείο M της καμπύλης με εξίσωση $y = \sqrt{2x+3}$ που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^5+15x^3+4$, $x \in \mathbb{R}$. Σε ποιο σημείο της η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει την ελάχιστη κλίση;
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2(e^\lambda+2)x+10e^\lambda-4$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της f συναρτήσει του λ . Αν $g(\lambda)$ είναι η ελάχιστη αυτή τιμή της f , να βρείτε τη μέγιστη τιμή της $g(\lambda)$
5. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει σταθερή περίμετρο c . Δείξτε ότι το εμβαδόν του γίνεται μέγιστο όταν αυτό είναι ισόπλευρο.
6. Ένα σημείο A της ευθείας $y=1-3x$ βρίσκεται στο 1^0 τεταρτημόριο. Από το A φέρνουμε κάθετες στους άξονες οπότε σχηματίζεται ένα ορθογώνιο. Βρείτε το A ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό.
7. Ένας κύλινδρος έχει όγκο $V=1000 \text{ m}^3$. Δείξτε ότι η συνολική του επιφάνεια E γίνεται ελάχιστη, όταν το ύψος του είναι ίσο με τη διάμετρο της βάσης του.

8. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{\beta}$, $x > 0$

έχει ακρότατο στο σημείο $M(1,3)$, να βρείτε τα a , β καθώς και το είδος του ακροτάτου.

Αποδεικτικά – Υπολογιστικά θέματα

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $3f(x^3) = f(x^2) + 12$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) \cdot f(1+h) - 6}{h} = 6$

2. Αν f , g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} , και ισχύει η σχέση: $f(3-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) \cdot g(h) - f(0) \cdot g(0)}{h} = f'(0) \cdot f(3) + g'(0) \cdot g(3)$$

3. Αν $\varphi(x) = (x+a)e^{x+\beta}$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4. Αν $f(x) = a \cdot \eta\mu(\lambda x) + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0$

5. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\ln x) + \eta\mu(\ln x)$, $x > 0$, να δείξετε ότι:

$$x^2 \cdot f''(x) + x f'(x) + f(x) = 0$$

6. Αν $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε

$$\text{ότι: } f'(x) + 4x^3 f(x) = x f''(x)$$

7. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση: $f(e^{x-1})=e^{x-1}+\ln x$, $x>0$, να υπολογίσετε το $f''(1)$.

Διάφορα θέματα

1. Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

α) $f(x)=e^x+x$ β) $f(x)=x^5+x^3$ γ) $f(x)=\sigma\phi x$
δ) $f(x)=x^2+3x+2$ ε) $f(x)=5x-1$ στ) $f(x)=x^3+x^2+10x-1$

2. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^3+x^2-5x+1$ β) $f(x)=x^3-3x^2+3x-10$
γ) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

3. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^2 \cdot \ln x$ β) $f(x)=e^x \cdot \ln x$
γ) $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ δ) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
ε) $f(x)=x \cdot e^x$ στ) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

4. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=(x-1)^3 \cdot (x-2)^3$ β) $f(x)=x^3 e^x - 27e^3$
γ) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+\lambda+2001$, $x \in \mathbb{R}$

- i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.
- ii) Δείξτε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο το οποίο και να βρεθεί ως συνάρτηση του λ .
- iii) Να βρεθεί το λ αν το τοπικό ελάχιστο της f είναι το 2004.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+12x-(\mu^2+\mu+2016)$. Να βρεθεί το μ εάν γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το 2000.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^4+4\lambda^3x+k$, $\lambda>0$. Γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο το 8 για $x=1$, να βρείτε τα k και λ .
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+(a-1)x^2+2x+10$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του a η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} .
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$, $x\in\mathbb{R}$
- α) Να βρείτε την $f(x)$.
- β) Να βρείτε τα σημεία ξ για τα οποία η παράγωγος της $f'(\xi)=0$.
- γ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης .
- δ) Να βρείτε το a αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 2002.
10. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=xe^{2k-x}$
- α) Να βρεθεί η $F'(x)$.
- β) Να μελετηθεί η F ως προς τη μονοτονία .
- γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση F έχει μέγιστο το οποίο και να βρεθεί.
- δ) Εάν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το e , να βρεθεί το k .