ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2003

ΘΕΜΑ 1

Α. Θεωρία σελ. 95
Β. Η σωστή απάντηση είναι η γ.
Γ. Η σωστή απάντηση είναι η β.
Δ. Η σωστή απάντηση είναι η α.
Ε. **α.** Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

γ. Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και $\alpha\neq 1$ τότε η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,\ +\infty)$

ΘΕΜΑ 2

Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 2x+4\eta\mu x)=\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+4\eta\mu x)==2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+4\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=$$

$$=(2\sigma\upsilon\nu^2x+4\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x=\left(2\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}+4\sigma\upsilon\nu x\right)\eta\mu x==(1+\sigma\upsilon\nu 2x+4\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x=$$

$(\sigma\upsilon\nu 2x+4\sigma\upsilon\nu x+1)\cdot\eta\mu x$ Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 2x+4\sigma\upsilon\nu x+1=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x-1+4\sigma\upsilon\nu x+1=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x+4\sigma\upsilon\nu x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\sigma\upsilon\nu x=0\\ \acute{\eta}\\ \sigma\upsilon\nu x+2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{c}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \ \kappa\in Z\\ \acute{\eta}\\ \sigma\upsilon\nu x=-2\Leftrightarrow\ \text{Αδύνατη}\end{array}$$

ΘΕΜΑ 3

α. Για να είναι η ακολουθία (α_ν) αριθμητική πρόοδος πρέπει $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=$ σταθερό για κάθε $\nu\in N^*$.

$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=[-11+2(\nu+1)]-(-11+2\nu)=-11+2\nu+2+11-2\nu=2$$

Οπότε $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=2\Leftrightarrow\omega=2$

$$\alpha_1=-11+2\cdot 1=-11+2=-9$$

β. <u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

$$S=\alpha_{12}+\alpha_{13}+...+\alpha_{21}=S_{21}-S_{11}$$

Όμως $S_{21}=\dfrac{21\cdot[2\alpha_1+(21-1)\omega]}{2}=\dfrac{21\cdot[2\cdot(-9)+20\cdot 2]}{2}=\dfrac{21\cdot 2[-9+20]}{2}=21\cdot 11=231$

$$S_{11}=\frac{11\cdot[2\cdot\alpha_1+(11-1)\omega]}{2}=\frac{11\cdot[2\cdot(-9)+10\cdot 2]}{2}=\frac{11\cdot 2(-9+10)}{2}=11$$

Οπότε $S=S_{21}-S_{11}=231-11=220$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

Θεωρούμε την ακολουθία (γ_ν) με $\gamma_1=\alpha_{12}=\gamma_2=\alpha_{13}$ κ.λ.π.

Η γ_ν είναι αριθμητική πρόοδος και έχουμε το άθροισμα $21-11=10$ όρων άρα $S_{10}=\frac{10(\gamma_1+\gamma_{10})}{2}=\frac{10\cdot(13+31)}{2}=\frac{10\cdot 44}{2}=10\cdot 22=220$

$\gamma_1=\alpha_{12}=-11+2\cdot 12=13$

$\gamma_{10}=\alpha_{21}=-11+2\cdot 21=-11+42=31\pm$

γ. $P(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2-x+3=0\Leftrightarrow x^2(x-3)-(x-3)=0\Leftrightarrow$

$$(x-3)(x^2-1)=0\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x-3=0 \\ ή \\ x^2-1=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} x=3 \\ ή \\ x=\pm 1 \end{array}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1=-1,\ \ x_2=1,\ \ x_3=3$

$\alpha_v=x_1\Leftrightarrow -11+2v=-1\Leftrightarrow 2v=10\Leftrightarrow v=5$

Οπότε $x_1=\alpha_5$ άρα $x_2=\alpha_5+2=\alpha_6$ και $x_3=\alpha_6+2=\alpha_7$

ΘΕΜΑ 4

Α. Η συνάρτηση f ορίζεται για $e^{2x}-2e^x+3>0$. Θέτουμε $y=e^x$ οπότε $y^2-2y+3>0$ η οποία ισχύει για κάθε $y\in R$ αφού Δ= -8<0. Άρα η παράσταση $e^{2x}-2e^x+3>0\Leftrightarrow x\in R$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

Για το πεδίο ορισμού της g ισχύει: $e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$ (επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα). Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι $A=(0,+\infty)$

Β. Για x>0 έχουμε:

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)=\ln 3+\ln(e^x-1)\Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)=\ln\left[3(e^x-1)\right]\Leftrightarrow$ (επειδή η lnx είναι 1-1),

$e^{2x}-2e^x+3=3(e^x-1)\Leftrightarrow e^{2x}-5e^x+6=0$. Θέτουμε $y=e^x$, οπότε $y^2-5y+6=0\Leftrightarrow y=2$ η y=3. Για y=2 έχουμε $e^x=2\Leftrightarrow$ $\boxed{x=\ln 2>0}$ δεκτή και για y=3 έχουμε $e^x=3\Leftrightarrow$ $\boxed{x=\ln 3>0}$ δεκτή.

Γ. Για x>0 έχουμε:

$f(x)>2g(x)\Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)>2\left[\ln 3+\ln(e^x-1)\right]\Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)>2\ln\left[3(e^x-1)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)>\ln\left[3(e^x-1)\right]^2\Leftrightarrow$

$e^{2x}-2e^x+3>\left[3(e^x-1)\right]^2\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+3>9\left(e^{2x}-2e^x+1\right)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow -8e^{2x}+16e^x-6>0\ \Leftrightarrow 4e^{2x}-8e^x+3<0$

Θέτουμε $\omega=e^x$, οπότε $4\omega^2-8\omega+3<0\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\omega<\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<e^x<\frac{3}{2}\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln\frac{1}{2}<\ln e^x<\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow \ln\frac{1}{2}<x<\ln\frac{3}{2}$.

Επειδή $\ln\frac{1}{2}<0$, $\ln\frac{3}{2}>0$ και x>0, με συναλήθευση έχουμε $\boxed{0<x<\ln\frac{3}{2}}$