# ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
# ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΠΕΜΠΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
# ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 41

Β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 42

Γ.

α Σωστό
β Λάθος
γ Λάθος
δ Σωστό

Δ.

α → 2
β → 3
γ → 1
δ → 6

### ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

**Α.** Έστω α και β δύο περιττοί ακέραιοι τότε α=2κ+1 και β=2λ+1 με $\kappa, \lambda \in Z$.
$\alpha \cdot \beta = (2\kappa+1)\cdot(2\lambda+1) = 4\kappa\lambda + 2\kappa + 2\lambda + 1 = 2(2\kappa\lambda + \kappa + \lambda) + 1 = 2\mu + 1$ πού είναι περιττός ακέραιος, όπου μ=2κλ+κ+λ ακέραιος.

**Β.**

- Εάν ο ακέραιος α είναι άρτιος τότε α=2κ

οπότε $\dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \dfrac{2\kappa\left[(2\kappa)^2+1\right]}{2} = \kappa(4\kappa^2+1)$ δηλαδή ακέραιος.

- Εάν α περιττός τότε α=2κ+1 οπότε

$$\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \frac{(2\kappa+1)\left[(2\kappa+1)^2+1\right]}{2} = \frac{(2\kappa+1)\cdot(4\kappa^2+4\kappa+2)}{2} = ==$$
$$= \frac{(2\kappa+1)\cdot 2\cdot(2\kappa^2+2\kappa+1)}{2} = (2\kappa+1)\cdot(2\kappa^2+2\kappa+1) \quad \textbf{(1)}$$

**Γ.**

Εφόσον ο α περιττός ακέραιος , άρα λόγω του (Β) , $\dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = (2\kappa+1)\cdot(2\kappa^2+2\kappa+1)$.

Οι ακέραιοι 2κ+1 , $2\kappa^2 + 2\kappa + 1$ είναι περιττοί. Σύμφωνα με το (Α) ερώτημα το γινόμενό τους είναι περιττός ακέραιος.

## ΘΕΜΑ 3ο:

**Α.** Η παραβολή είναι της μορφής $y^2 = 2px$ . Άρα 2p=4 δηλαδή p=2 και εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$=(1,0).

Η διευθετούσα είναι $x = -\frac{p}{2}$, οπότε x= -1.

**Β.** Εάν η ευθεία (ε) που διέρχεται από την εστία είναι κάθετη στον άξονα των x τότε έχει εξίσωση x=1 και η απόστασή της από την αρχή των αξόνων είναι μία μονάδα , άρα δεν είναι η ζητούμενη. Οπότε η (ε) δεν είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα και η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow \lambda x - y + \beta = 0$. Η ευθεία διέρχεται από την εστία Ε (1,0) άρα $\lambda \cdot 1 - 0 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\lambda$ .

Τότε

$$d(\varepsilon, O) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1 .$$

Τελικά οι ζητούμενες ευθείες είναι: $x - y - 1 = 0$ και $-x - y + 1 = 0$ .

**Γ.** Εάν το σημείο επαφής είναι $(x_1, y_1)$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y_1 \cdot y = 2(x + x_1)$

- Εάν $y_1 = 0$ τότε η ευθεία είναι x=0 η οποία δεν είναι παράλληλη στην y=x-1.
- Άρα $y_1 \neq 0$ οπότε $y = \frac{2}{y_1} \cdot x + \frac{2x_1}{y_1}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{2}{y_1}$. Θα πρέπει

$\lambda = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2$ . Το $(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής άρα $y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1$ .

η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y_1 \cdot y = 2(x + x_1) \Leftrightarrow 2y = 2(x+1) \Leftrightarrow y = x + 1$.

## ΘΕΜΑ 4Ο:

**Α.**

Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = -2\sigma\upsilon\nu\vartheta$ , $B = -2\eta\mu\vartheta$ και Γ=-1. Για να παριστάνει κύκλο πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ . Έχουμε

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (-2\eta\mu\theta)^2 - 4 \cdot (-1) = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\eta\mu^2\theta + 4 = 8$$

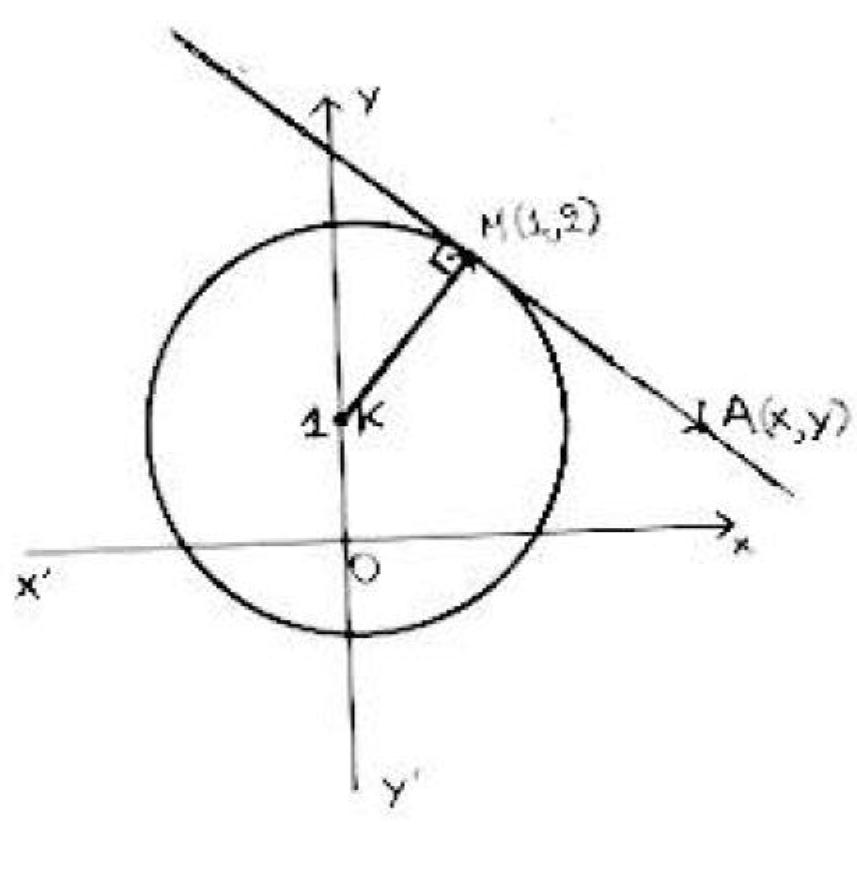
Το κέντρο του κύκλου είναι $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (\sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta)$

Η ακτίνα είναι $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$.

**Β.**

Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ η εξίσωση του κύκλου γίνεται $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ με κέντρο K(0,1) . Το σημείο M(1,2) είναι σημείο του κύκλου γιατί επαληθεύει την εξίσωση του.

Γνωρίζουμε ότι εάν ένα σημείο $A(x, y)$ ανήκει στην εφαπτομένη (ε) αν και μόνο αν η ακτίνα ΚΜ είναι κάθετη στο ΜΑ.



$\overrightarrow{KM} = (x_M - x_K, y_M - y_K) = (1-0, 2-1) = (1,1)$

$\overrightarrow{MA} = (x_A - x_M, y_A - y_M) = (x-1, y-2)$

Άρα $\vec{KM} \cdot \vec{MA} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$ Τελικά η εφαπτομένη είναι $x + y - 3 = 0$

**Γ.**

Τα κέντρα των κύκλων είναι $K(\sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta)$. Αν $x_0 = \sigma\upsilon\nu\vartheta$ και $y_0 = \eta\mu\vartheta$. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\vartheta + \sigma\upsilon\nu^2\vartheta = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1$. Οπότε οι συντεταγμένες του κέντρου επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ που είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο (0,0) και ακτίνα 1.