Πανελλήνιες Εξετάσεις 2003

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1.

Α. Θεωρία στο σχολικό βιβλίο σελίδα 45

Β. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος

Γ α. Ορισμός σελίδα 146 σχολικό βιβλίο
β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 89. Δηλαδή «ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ …. ισαπέχουν από την Ε και την δ»

ΘΕΜΑ 2.

Α.

- Αν ο α είναι άρτιος τότε α=2λ, $\lambda \in Z$. Τότε $\alpha^3 = (2\lambda)^3 = 8\lambda^3 = 8\kappa$ με $\kappa = \lambda^3 \in Z$.
- Αν ο α είναι περιττός τότε α=2λ+1, $\lambda \in Z$. Τότε

$\alpha^3 = (2\lambda+1)^3 = \ldots = 8\lambda^3 + 12\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 2\left(4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda\right) + 1 = 2\kappa + 1$ με $\kappa = 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda \in Z$.

Β.

- Αν ο α είναι άρτιος τότε από το ερώτημα Α. ισχύει α=2λ, $\alpha^3 = 8\kappa$, $\kappa, \lambda \in Z$. Επομένως $\alpha\left(\alpha^2+1\right) = \alpha^3 + \alpha = 8\kappa + 2\lambda = 2(4\kappa + \lambda)$ που είναι άρτιος σαν πολ/σιο του 2.
- Αν ο α είναι περιττός τότε από το Α ερώτημα, α=2λ+1, $\alpha^3 = 2\kappa + 1$, $\kappa, \lambda \in Z$. Άρα $\alpha\left(\alpha^2+1\right) = \alpha^3 + \alpha = 2\kappa + 1 + 2\lambda + 1 = 2(\kappa + \lambda + 1)$ που είναι πάλι άρτιος.

ΘΕΜΑ 3.

Α. Έστω ότι το Α έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) τότε:

$$\left.\begin{matrix} x_0 = 2\lambda - 1 \\ y_0 = 3\lambda + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_0 + 1 = 2\lambda \\ y_0 = 3\lambda + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{x_0+1}{2} = \lambda \\ \dfrac{y_0-2}{3} = \lambda \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{x_0+1}{2} = \frac{y_0-2}{3} \Leftrightarrow \ldots 3x_0 - 2y_0 + 7 = 0$$

. Άρα το σημείο Α κινείται στην ευθεία με εξίσωση $3x - 2y + 7 = 0$ **για κάθε λ που ανήκει στο R.**

(Επειδή δίνεται ότι $\lambda \neq -2$ θα μπορούσε να ήταν δεκτή και η λύση η οποία εξαιρεί το σημείο της ευθείας $(2\cdot(-2) - 1\ ,\ 3\cdot(-3) + 2) = (-5, -4)$. Παρατηρήστε ότι για λ= -2 τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά άρα δεν ορίζουν τρίγωνο)

Β. Για λ=1 οι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ είναι: Α(1,5), Β(1,2) και Γ(2,3). Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (1-1, 2-5) = (0, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (2-1, 3-5) = (1, -2)$, οπότε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\ \right| = \ldots = \frac{3}{2} \text{ τ.μονάδες.}$$

Γ. Για να εφάπτεται η ευθεία ΒΓ στον κύκλο με κέντρο το Α πρέπει η ακτίνα του να ισούται με την απόσταση του Α από την ευθεία ΒΓ δηλαδή $\rho = d(B\Gamma, A)$. Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας

ΒΓ. $\lambda_{ΒΓ} = \frac{y_Γ - y_Β}{x_Γ - x_Β} = \frac{3-2}{2-1} = 1$. Οπότε η ευθεία ΒΓ έχει

εξίσωση: $y - y_Β = \lambda_{ΒΓ} \cdot (x - x_Β) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-1) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Τότε $\rho = d(ΒΓ, Α) = \frac{|1-5+1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το Α(1,5) και ακτίνα

ρ=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Η εξίσωση του κύκλου είναι: C: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Α. Έχουμε $4x^2 + 2y^2 = 3p^2 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{3p^2} + \frac{2y^2}{3p^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3p^2}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{6p^2}{4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 1$.

Επειδή $\frac{p\sqrt{6}}{2} > \frac{p\sqrt{3}}{2}$ άρα οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

Έχουμε $\alpha = \frac{p\sqrt{6}}{2}$ και $\beta = \frac{p\sqrt{3}}{2}$ οπότε $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

$= \sqrt{\frac{6p^2}{4} - \frac{3p^2}{4}} = \sqrt{\frac{3p^2}{4}} = \frac{p\sqrt{3}}{2}$

Οι εστίες τότε είναι $Ε'\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $Ε\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

Β. Για να βρούμε τα κοινά σημεία Κ και Λ των δύο κωνικών τομών λύνουμε το σύστημα τους.

$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ 4x^2 + 2y^2 = 3p^2 \end{array}\right\}$ οπότε $4x^2 + 2 \cdot 2px = 3p^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4px - 3p^2 = 0$

$\Delta = (4p)^2 - 4 \cdot 4(-3p^2) = 16p^2 + 48p^2 = 64p^2 > 0$

Οι λύσεις είναι $x_{1,2} = \frac{-4p \pm \sqrt{64p^2}}{2 \cdot 4} = \frac{-4p \pm 8p}{8} = \begin{cases} \frac{-4p + 8p}{8} = \frac{p}{2} \\ \frac{-4p - 8p}{8} = \frac{-12p}{8} \end{cases}$

Η λύση $x = -\frac{12p}{8} < 0$ άρα είναι μη δεκτή αφού όλα τα σημεία της παραβολής έχουν θετική

τετμημένη. Οπότε για $x = \frac{p}{2}$ έχουμε $y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2} \Leftrightarrow y^2 = p^2 \Leftrightarrow y = \pm p$.

Συνεπώς τα σημεία είναι $Κ\left(\frac{p}{2},\ p\right)$ και $Λ\left(\frac{p}{2},\ -p\right)$.

Γ. Για την παραβολή $y^2 = 2px$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της (x_1, y_1) έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$ οπότε για το σημείο της $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ γίνεται $py = p(x + \frac{p}{2}) \overset{(p>0)}{\Leftrightarrow} y = x + \frac{p}{2}$.

Για την έλλειψη η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της (x_1, y_1) είναι

$\frac{x_1 x}{\left(\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{y_1 y}{\left(\frac{p\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow 4x_1 x + 2y_1 y = 3p^2$. Στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ η εφαπτομένη έχει

εξίσωση: $4\frac{p}{2}x + 2py = 3p^2 \Leftrightarrow 2px + 2py = 3p^2 \overset{p>0}{\Leftrightarrow} 2x + 2y - 3p = 0$

Οπότε οι ευθείες είναι : $\varepsilon_1 : y = x + p/2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$

$\varepsilon_2 : 2x + 2y - 3p = 0$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{-2}{2} = -1$. Τελικά $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1(-1) = -1$ συνεπώς οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.