

ΘΕΜΑ 1^ο:

A) Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Μονάδες 8

B) Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $x_1 \neq 0$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, $x_2 \neq 0$.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με «Σ» (σωστό) ή «Λ» (λάθος)

a) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

γ) $\text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \theta}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

δ) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ_1 του $\vec{\alpha}$ είναι:

$$\lambda_1 = -\frac{y_1}{x_1}$$

(Να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα της κάθε ερώτησης και δίπλα τον χαρακτηρισμό της «Σ» ή «Λ»)

Μονάδες 2Χ4=8

Γ) Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ του επιπέδου και έστω $\hat{\theta}$ η γωνία που σχηματίζουν. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{συν} \hat{\theta} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2^ο:

Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ που τέμνει τον άξονα y' στα σημεία B και B'.

A) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών της E' και E και την εκκεντρότητα της έλλειψης.

Μονάδες 7

B) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτομένων στο σημείο της έλλειψης που έχει τετμημένη $x_0 = 1$ είναι: $(\epsilon_1): x + \sqrt{2} \cdot y = 2$ και $(\epsilon_2): x - \sqrt{2} \cdot y = 2$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2) ;

Μονάδες 9

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις προηγούμενες εφαπτόμενες (ϵ_1) και (ϵ_2) και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο:

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση (c): $x^2 + y^2 = \rho^2$ και η ευθεία (ϵ): $x + y = 4$

A) Αν είναι γνωστό ότι ο κύκλος διέρχεται από το σημείο $\Sigma(-2, -2)$, να βρείτε την ακτίνα του ρ και στη συνέχεια το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας και του κύκλου.

Μονάδες 12,5

B) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου, που ορίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο (Η ακτίνα του κύκλου είναι αυτή που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα).

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 4^ο:

Κατά την διάρκεια της προπόνησης της Εθνικής ομάδας ποδοσφαίρου ο προπονητής κ. Ρεχάγκελ σχεδίασε στο γήπεδο ορθοκανονικό σύστημα

αξόνων (\bar{KX}, \bar{KY}) και τοποθέτησε τους παίκτες του ως εξής: Τον Καραγκούνη στην θέση $K(0,0)$, τον Λυμπερόπουλο στην θέση $\Lambda(10,10)$ και τον Στολτίδη στην θέση $\Sigma(20,20)$. Ο Καραγκούνης δίνει πάσα στον Λυμπερόπουλο και η μπάλα διαγράφει τμήμα παραβολικής τροχιάς που η εστία της βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα

\bar{KY} , στο σημείο N.

Στην συνέχεια ο Λυμπερόπουλος δίνει ευθύγραμμη πάσα στον Στολτίδη. Από το σημείο N παρακολουθεί την εξέλιξη της φάσης ο προπονητής κ. Ρεχάγκελ. Να βρείτε:

- A) Την εξίσωση της παραπάνω παραβολικής τροχιάς και τις συντεταγμένες της θέσης του προπονητή.
- B) Την εξίσωση της παραπάνω ευθύγραμμης τροχιάς.
- Γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω παραβολικής τροχιάς στο σημείο Λ .
- Δ) Την απόσταση που βρίσκεται ο Καραγκούνης από την παραπάνω εφαπτομένη.
- Ε) Δείξτε ότι τα σημεία K, Λ, Σ είναι συνευθειακά.

Μονάδες $5 \times 5 = 25$

Η Διευθύντρια

Ο Εισηγητής

Νικολαΐδης Άρ.

Σαλταφέρου Κυριακή

ΓΗΠΕΔΟ

