

Μαθηματικά
Θετικής Κατεύθυνσης
Γ' Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

A.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Μονάδες 7,5

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i \bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

B.1. Αν:

$$z_1 = 3 + 4i \text{ και } z_2 = 1 - \sqrt{3}i,$$

να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1^2 $	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $- \bar{z}_1 $	δ. -5
5. $ i z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

B.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι:

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

Μονάδες 5

Απάντηση:

A1. Θεωρία παράγραφος 2.3 σχολικού βιβλίου.

- A2. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

- B1. 1. ζ
2. γ
3. α
4. δ
5. β

B2. $|z| = 1$ άρα $|z|^2 = 1$

Ζήτημα 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -1/9$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 9

Απάντηση:

α. Αφού f συνεχής είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 9a$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\alpha x^2) = 9\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1 - e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{-e^{x-3}}{1} \right) = -1$$

Έτσι: $9\alpha = -1$. Άρα $\alpha = -1/9$

β. Για $x > 3$ με f παραγωγίσιμη ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \right)' = \frac{(1 - e^{x-3})'(x-3) - (1 - e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3}(x-3) - (1 - e^{x-3})}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{-xe^{x-3} + 3e^{x-3} - 1 + e^{x-3}}{(x-3)^2} = \frac{-xe^{x-3} + 4e^{x-3} - 1}{(x-3)^2} = \frac{(4-x)e^{x-3} - 1}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Έτσι:

$$f'(4) = \frac{-1}{(4-3)^2} = -1$$

και αφού:

$$f(4) = \frac{1 - e^{4-3}}{4-3} = \frac{1 - e}{1} = 1 - e$$

η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - (1 - e) = -1(x - 4) \Leftrightarrow y = -x - e + 5$$

γ. Επειδή για $x \in [1, 2]$ είναι:

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= -\int_1^2 \left(-\frac{1}{9}x^2 \right) dx = -\left[-\frac{1}{9} \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \\ &= +\frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{27} \quad \text{τ.μονάδες.} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Επειδή στην εκφώνηση του θέματος δεν διευκρινίζεται αν στο ερώτημα γ η τιμή του a πρέπει να ληφθεί ως $-1/9$, παρατηρούμε ότι:

(i) αν το a ληφθεί ως $-1/9$ τότε η τιμή του εμβαδού είναι:

$$E = \frac{7}{27} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

(ii) αν όμως δεν υπονοείται κάτι τέτοιο τότε η λύση θα έχει ως εξής:

- αν $a \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ οπότε :

$$E = \int_1^2 ax^2 dx = \frac{7a}{3} \text{ τ.μονάδες.}$$

- αν $a < 0$ τότε $f(x) < 0$, οπότε:

$$E = -\int_1^2 ax^2 dx = -\frac{7a}{3} \text{ τ.μονάδες.}$$

Ζήτημα 3ο

Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathfrak{R} , ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathfrak{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

- α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

- β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

- γ.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

Απάντηση:

α) Αφού f παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} , παραγωγίζουμε την δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \mathfrak{R}$$

Δηλαδή:

$$f'(x) \cdot [3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \mathfrak{R} \quad (1)$$

Όμως:

$$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathfrak{R}$$

αφού: $a = 3 > 0$ και $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$

και $3x^2 - 4x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

αφού: $\Delta = 16 - 12 \cdot 6 < 0$ και $a = 3 > 0$

Οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

Επομένως δεν υπάρχουν ακρότατα.

β) Επειδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathfrak{R} .

γ) Είναι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \quad x \in \mathfrak{R}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \quad x \in [0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$$\begin{aligned} g(0) &= -1 < 0 \\ g(1) &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Άρα, από Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$: $g(x_0) = 0$ (2)

Για $x = x_0$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$f^3(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f(x_0) = g(x_0)$$

οπότε από την σχέση (2) είναι:

$$f(x_0) \cdot [f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma] = 0 \quad (3)$$

Όμως:

$$f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma > 0$$

Γιατί:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma = (\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$$

Αυτό συμβαίνει γιατί:

$$\beta^2 < 3\gamma \quad \text{οπότε} \quad \gamma > 0, \quad \text{άρα} \quad -\gamma < 0$$

Άρα:

$$(\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$$

Επομένως, από την σχέση (3) προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$:

$$f(x_0) = 0$$

κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, προκύπτει ότι η λύση x_0 είναι μοναδική στο $(0,1)$.

Ζήτημα 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathfrak{R} , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$$

για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει:

$$f'(x) = -2xf^2(x)$$

(όπου $f'(x)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης f).

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) - 2x)$

Μονάδες 7

Απάντηση:

α) Θέτουμε $x t = u$ και διαφορίζουμε ως προς t .
Έτσι έχουμε $d(x t) = du$ ή $x dt = du$

Ακόμα για

- $t = 0$ έχουμε $u = 0$ και
- $t = 1$ έχουμε $u = x$.

Άρα:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^1 x^2 t f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathfrak{R} , προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$\int_0^x u f^2(u) du$$

είναι παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} . Άρα: $f'(x) = -2x f^2(x)$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{f(x)} - x^2 \right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \stackrel{(a)}{=} \\ &= -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = +2x - 2x = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. Επομένως η $g(x)$ σταθερή.

γ) (α' τρόπος)

Επειδή η συνάρτηση g είναι σταθερή δηλαδή $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, θα είναι για $x = 0$: $g(0) = c$.

Ακόμα:

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} - 0^2 = \frac{1}{f(0)}$$

οπότε:

$$\frac{1}{f(0)} = c$$

Από την (ii) για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$.

Επομένως: $c = 1$.

Άρα: $g(x) = 1$ και λόγω της:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$$

προκύπτει:

$$1 = \frac{1}{f(x)} - x^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

γ) (β' τρόπος)

Από $f'(x) = -2x f(x)$ και επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ είναι:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x$$

ή

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = (x^2)'$$

Άρα:

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c, \quad c \in \mathfrak{R}$$

Όμως:

$$f(0) = 1 - \int_0^0 u f^2(u) du = 1$$

Έτσι:

$$\frac{1}{f(0)} = 0^2 + c$$

$$1 = c.$$

Οπότε:

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + 1$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

δ) Επομένως:

$$x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x = x \cdot \frac{1}{1+x^2} \eta\mu 2x =$$

$$= \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x, \quad x \in \mathfrak{R}$$

Έχουμε:

$$\left| \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \right| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| |\eta\mu 2x| \leq \left| \frac{x}{1+x^2} \right|$$

οπότε:

$$\left| \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \right| \leq \left| \frac{x}{1+x^2} \right|, \quad x \in \mathfrak{R}$$

ή

$$-\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \left(\frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \right) \leq \left| \frac{x}{1+x^2} \right|, \quad x \in \mathfrak{R}$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} \right| = 0$$

Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \right) = 0$$