ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ 2006

Από τον Άρη Νικολαΐδη

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α1. Σχολικό σελ.:253
Α2. Σχολικό σελ.:273
Β.

a) Λάθος
b) Σωστό
c) Σωστό
d) Λάθος
e) Σωστό

ΘΕΜΑ 2^{O}

Α. Για κάθε $x_1, x_2 \geq 2$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2 + (x_1 - 2)^2 = 2 + (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2$ (αφού $x_1 - 2 \geq 0, x_2 - 2 \geq 0$) $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι "1-1".

Β. Αφού η f είναι "1-1" στο $[2, +\infty)$ είναι και αντιστρέψιμη. Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = y \Leftrightarrow (x - 2)^2 = y - 2$ με $y \geq 2$ $\Leftrightarrow x - 2 = \mp\sqrt{y - 2}$ $\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y - 2}$ ή $x = 2 - \sqrt{y - 2} \rightarrow$ απορρίπτεται αφού $x \geq 2$ άρα $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}$ με $x \geq 2$.

Γ. Έχω ότι $f(x) = x \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$. Άρα τα κοινά σημεία της C_f με την $y = x$ είναι τα $(2,2)$ και $(3,3)$. Η $C_{f^{-1}}$ έχει τα ίδια κοινά σημεία με την $y = x$ όπως και η C_f αφού $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$. Δηλ. τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$ είναι τα $(2,2), (3,3)$.

Δ. Έχω ότι $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = 2 + \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow (x - 2)^4 = x - 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 2)\left[(x - 2)^3 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $(x - 2)^3 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ ή $(x - 2)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$.
Ομοίως για $x \geq 2$ έχουμε $f(x) \leq f^{-1}(x) \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$ οπότε

$$E = \int_2^3 \left|f(x) - f^{-1}(x)\right| dx = \int_2^3 \left[f^{-1}(x) - f(x) dx\right] = \int_2^3 \left(\sqrt{x - 2} + 2 - 2 - (x - 2)^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^3 - \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_2^3 = \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 3^{O}

Α. ι) Έχω ότι : $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 - z_3$. Αρκεί να δειχθεί ότι: $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow |2z_2 + z_3|^2 = |z_2 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2z_2+z_3)\cdot(2\bar{z}_2+\bar{z}_3)=(z_2+2z_3)\cdot(\bar{z}_2+2\bar{z}_3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4z_2\cdot\bar{z}_2+2z_2\cdot\bar{z}_3+2z_3\bar{z}_2+z_3\cdot\bar{z}_3=z_2\bar{z}_2+2z_2\bar{z}_3+2\bar{z}_2z_3+4z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cdot1+1=1+4\cdot1 \Leftrightarrow 5=5$. Ομοίως $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$ αν χρησιμοποιήσουμε ότι $z_2=-z_1-z_3$.

ii) **$1^{ος}$ Τρόπος:**

Αρκεί να δειχθεί ότι: $|z_1-z_2|^2\le 4 \Leftrightarrow |z_1-z_2|\le 2$ το οποίο ισχύει, αφού από τριγωνική ανισότητα έχουμε: $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|=1+1=2$

$2^{ος}$ Τρόπος :

Στο β. θα αποδείξουμε ότι οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 κινούνται σε ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 έχουμε $|z_1-z_2|=\lambda_3=R\sqrt{3}=\sqrt{3}$ οπότε $|z_1-z_2|^2\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}^2\le 4 \Leftrightarrow 3\le 4$ ισχύει.

(ii)β

$|z_1-z_2|^2\le 4 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\cdot(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\le 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left(z_1\bar{z}_2+\overline{(z_1\bar{z}_2)}\right)+2\le 4 \Leftrightarrow -2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\le 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\ge -1$

B. Έστω M_1,M_2,M_3 οι εικόνες των μιγαδικών z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα. Επειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ άρα τα M_1,M_2,M_3 κινούνται στον μοναδιαίο κύκλο. Επίσης από το $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ ισχύει $(M_2M_1)=(M_3M_2)=(M_3M_1)$ δηλαδή το $M_1M_2M_3$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου και λόγω των $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, είναι $(OM_1)=(OM_2)=(OM_3)=1$, άρα το $M_1M_2M_3$ είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 4^{O}

A. Περιορισμοί: $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \end{cases}$ $\quad D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{-2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{-2x-(x-1)^2}{x\cdot(x-1)^2}=\frac{-2x-x^2+2x-1}{x\cdot(x-1)^2}=-\frac{x^2+1}{x\cdot(x-1)^2}<0$$

$,x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{x+1}{x-4}-\ln x\right]=+\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(-\ln x)=+\infty$)

Επίσης $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=-\infty$ (επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$, $x-1<0$, $\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2>0$ άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\infty$).

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=+\infty$ (επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$, $x-1>0$, $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$ άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$)

Τέλος $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=-\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\ln x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$)
άρα το Σ.Τ. είναι το $(-\infty,+\infty)$

Β. Αφού η f συνεχής στο $(0,1)$ και σε αυτό το σύνολο τιμών (Σ.Τ.) είναι το $(-\infty,+\infty)$ υπάρχει $x_0\in(0,1): f(x_0)=0$ επειδή f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ τότε το x_0 είναι μοναδικό στο διάστημα $(0,1)$. Ομοίως η f συνεχής στο $(1,+\infty)$ και σε αυτό $Σ.Τ.=(-\infty,+\infty)$ υπάρχει $x_1\in(1,+\infty): f(x_1)=0$ επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό στο $(0,1)$. Οπότε η $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Γ. $g'(x)=\frac{1}{x}$, $h'(x)=e^x$

$εφ_A: y-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\alpha}x+\ln\alpha-1$

$εφ_B: y-e^\beta=e^\beta(x-\beta)\Leftrightarrow y=e^\beta x+e^\beta-e^\beta\cdot\beta$

$$\text{ΠΡΕΠΕΙ}\begin{cases}\frac{1}{\alpha}=e^\beta\\ \ln\alpha-1=e^\beta-e^\beta\cdot\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\ln\alpha\\ \ln\alpha-1=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\cdot(-\ln\alpha)\end{cases}$$

τότε $\alpha\cdot\ln\alpha-\alpha=1+\ln\alpha\Leftrightarrow 1+\ln\alpha-\alpha\ln\alpha+\alpha=0\Leftrightarrow-\ln\alpha(\alpha-1)+\alpha+1=0\Leftrightarrow\overset{\alpha\neq1}{\Longleftrightarrow}$ (αφού αν $\alpha=1$,0+2=0 $\Leftrightarrow 2=0$ αδύνατο) $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\ln\alpha=0\Leftrightarrow f(\alpha)=0$

Δ. Αφού πρώτον, το $A(\alpha,\ln\alpha)$ είναι το σημείο επαφής με την C_g της κοινής εφαπτομένης των C_g, C_h και δεύτερο το α είναι ρίζα της $f(x)=0$ στηριζόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα στο οποίο η $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$, τότε θα υπάρχουν δύο ακριβώς τέτοια σημεία Α, οπότε θα υπάρχουν δύο ακριβώς κοινές εφαπτόμενες.
(Με διαφορετική διατύπωση: Στο προηγούμενο ερώτημα έχει δειχθεί ότι οι εφαπτομένες των C_g, C_h ταυτίζονται σε εκείνα τα σημεία στα οποία οι τετμημένες είναι ρίζες της $f(x)=0$. Γνωρίζοντας δε ότι η $f(x)=0$ έχει ακριβώς δυό ρίζες, άρα και οι C_g, C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες)