ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^0

Α.1 Θεωρία σελ. 98 σχ. βιβλίου.

Α.2. Ορισμός σελ. 141 σχ. βιβλίου.

Α3. Ορισμός σελ. 280 σχ. βιβλίου

Β. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ 2^0

α) $|z| = \left|\frac{2+\alpha\cdot i}{\alpha+2\cdot i}\right| = \frac{|2+\alpha\cdot i|}{|\alpha+2\cdot i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Άρα η εικόνα του z βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

β)

i) Για α=0 έχουμε $z_1 = -i$ και για α=2 έχουμε $z_2 = 1$. Άρα η απόσταση των εικόνων των z_1, z_2 είναι: $|z_1 - z_2| = |-i-1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

ii) $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{2\nu} \Leftrightarrow (-i)^{2\nu} = (-1)^\nu \Leftrightarrow i^{2\nu} = (-1)^\nu \Leftrightarrow (i^2)^\nu = (-1)^\nu \Leftrightarrow (-1)^\nu = (-1)^\nu$

που ισχύει

ΘΕΜΑ 3^0

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=IR$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3\cdot x^2-3$ και $f''(x)=6x$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\geq 1$ ή $x\leq -1$ και $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$. Έτσι έχουμε:

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$ Τ.Μ	$\searrow$	$f(1)$ Τ.Μ	$\nearrow$	

x	- ∞		0		+∞
f''		-	0	+	
f		⌒	Σ.Κ	⌣	

$y_{max}=f(-1)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$

$y_{min}=f(1)=-2(1+\eta\mu^2\theta)<0$

$y_k=f(0)=-2\eta\mu^2\theta<0$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x-2\cdot\eta\mu^2\theta)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3-3x-2\cdot\eta\mu^2\theta)=+\infty$$

Στο διάστημα $A_1=(-\infty,-1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-1)\right]=\left(-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$, οπότε στο $f(A_1)$ περιέχεται το 0, δηλ.

η f έχει μοναδική ρίζα αφού είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $A_2=[-1,-1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα

$f(A_2)=[f(1)\,,f(-1)]=[-2(1+\eta\mu^2\theta)\,,2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$, οπότε στο f(A_2) περιέχεται το 0, δηλ. η f έχει μοναδική ρίζα στο [-1 , 1] αφού είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $A_3=[1\,,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα

$f(A_3)=\left[f(1)\,,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-2(1+\eta\mu^2\theta)\,,+\infty)$, οπότε στο f(A_3) περιέχεται το 0, δηλ. η f έχει μοναδική ρίζα αφού είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η f έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι οι συν/νες των σημείων αυτών επαληθεύουν την εξίσωση $(\varepsilon):y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. Έτσι για το Τ.Μ έχουμε:

$x=-1=\quad y_{max}=f(-1)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ δηλ. έχουμε το σημείο $A_1(-1,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$. Για το Τ.Ε έχουμε: $x=1=\quad y_{min}=f(1)=-2(1+\eta\mu^2\theta)$ δηλ. έχουμε το σημείο $A_2(1,-2(1+\eta\mu^2\theta))$. Για το Σ.Κ έχουμε: $x=0=\quad y_k=f(0)=-2\eta\mu^2\theta$ δηλ. έχουμε το σημείο $A_3(0,-2\eta\mu^2\theta)$.

Για το σημείο A_1	Για το σημείο A_2	Για το σημείο A_3
$2\sigma\upsilon\nu^2\theta=-2\cdot(-1)-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow$	$-2-2\eta\mu^2\theta=-2\cdot1-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow$	$-2\eta\mu^2\theta=-2\cdot0-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow$
$2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\eta\mu^2\theta=2\Leftrightarrow$	$-2-2\eta\mu^2\theta=-2-2\eta\mu^2\theta$	$-2\eta\mu^2\theta=-2\eta\mu^2\theta$
$\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$ που ισχύει	που ισχύει	που ισχύει

δ) $f(x)\ge-2x-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\ge-2x-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow x^3-x\ge0\Leftrightarrow$
$x(x-1)(x+1)\ge0\Leftrightarrow x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$

Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, άρα και ολοκληρώσιμες. Επομένως και η διαφορά τους. Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι:

$$E=\int_{-1}^{1}|f(x)-y|dx=\int_{-1}^{1}|x^3-x|dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\ldots=\frac{1}{2}\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4º

α) Οι f , g είναι συνεχείς και η F παραγωγίσιμη στο [0 , 1] με $F'(x)=f(x)\cdot g(x)$ και ακόμη $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Επίσης αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε: $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)>0$

Άρα $F'(x)=f(x)\cdot g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και επειδή είναι συνεχής θα είναι και γνησίως αύξουσα στο [0 , 1]. Έτσι

$0<x\le 1 \Rightarrow F(0)<F(x)\le F(1) \Rightarrow 0<F(x)\le F(1)$. Άρα: $F(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$

β)

$$0\le t\le x \Rightarrow f(t)\le f(x) \Rightarrow f(t)\cdot g(t)\le f(x)\cdot g(t) \quad [\text{επειδή } g(x)>0\,] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\cdot g(t)dt<\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt \Rightarrow F(x)<f(x)\cdot G(x)$$

Σχόλιο:

$$f(t)g(t)\le f(x)g(t) \Leftrightarrow f(x)g(t)-f(t)g(t)\ge 0 \Rightarrow \int_0^x (f(x)g(t)-f(t)g(t))dt>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(x)g(t)dt>\int_0^x f(t)g(t)dt$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$, $x\in(0,1]$. Τότε:

$$h'(x)=\frac{F'(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)\cdot g(x)\cdot \int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt\cdot g(x)}{G^2(x)}=$$

$$=\frac{\left(f(x)\cdot \int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt\right)\cdot g(x)}{G^2(x)}=\frac{\big(f(x)\cdot G(x)-F(x)\big)\cdot g(x)}{G^2(x)}>0$$

διότι :

$g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$

$f(x)\cdot G(x)-F(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0 , 1] και επομένως

$$0 < x \le 1 \Rightarrow h(x) \le h(1) \Rightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}$$

δ) $$I = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{x^5}$$. Όμως

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) \cdot g(x)}{g(x)} = f(0)$$, αφού η f είναι συνεχής

$$\lim_{x - 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5} = \lim_{x - 0^+} \frac{\eta\mu x^4 \cdot 2x}{5 \cdot x^4} = \lim_{x - 0^+} \frac{\eta\mu x^4}{x^4} \cdot \lim_{x - 0^+} \frac{2x}{5} = 1 \cdot 0 = 0$$

Άρα $I = f(0) \cdot 0 = 0$