ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ   ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ: 2008 - 2009

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^0 :

Α) Θεωρία από το σχολικό βιβλίο. Σελίδα 251.

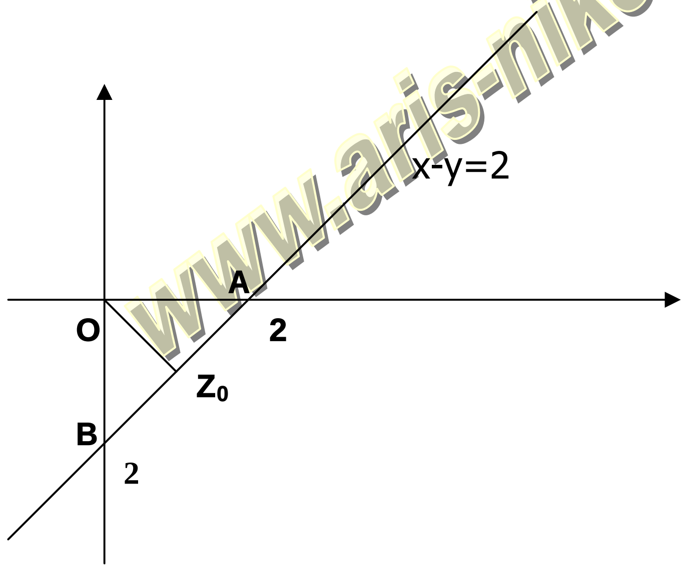
Β) Θεωρία από το σχολικό βιβλίο. Σελίδα 213.

Γ) α – Σ , β – Σ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Λ

ΘΕΜΑ 2^0 :

Α) α. Αν z=x+yi τότε : $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ και άρα οι εικόνες Μ(x,y)του z βρίσκονται στην ευθεία (ε): x – y =2.

β. $1^{ος}$ τρόπος



Ο μιγαδικός αριθμός z_0 που έχει το μικρότερο μέτρο θα βρίσκεται στο σημείο τομής των ευθειών (ε): x –y=2 και της κάθετης (δ) από το Ο προς αυτήν. Όμως η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(2,0) και Β(0,2) δηλ. το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και άρα η εικόνα Μ του z_0 θα βρίσκεται στο μέσον του ΑΒ. Έτσι Μ(1, –1) δηλαδή z_0=1 – i.

2^ος^ τρόπος

Η εικόνα του z_0 είναι Μ(1, –1) και επειδή επαληθεύει την εξίσωση της (ε) ο z_0 θα είναι ένας από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς και $|z_0| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Όμως η απόσταση του Ο(0,0) από την (ε) είναι: $d(O,\varepsilon) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Άρα ο $z_0 = 1 - i$ θα έχει το ελάχιστο μέτρο.

Β. Αν w=x+yi τότε:

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -4 \ \text{ή} \ x = 3 \\ y = 1 \end{matrix}$$

Δηλαδή w = – 4+i ή w =3+i.

ΘΕΜΑ 3^0^ :

Α. Παρατηρούμε ότι: $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ δηλαδή η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ελάχιστο και ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Fermat, άρα $f'(0) = 0$. Όμως

$$f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1} \text{ και επομένως } a^0 \ln a - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

Β. α. Για α=e είναι: $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0 \ , \ x > -1$.

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού $f''(x) > 0 \ , \ x > -1$ και f΄(0)=0 η f΄ θα είναι γνησίως αύξουσα οπότε:

$$\begin{matrix} -1 < x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \\ 0 < x \qquad \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \end{matrix}$$ Άρα:

x		– 1	0	1
f΄		—	0	+
f		↘	1	↗

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0\ ,+\infty\ )$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)[f(\beta)-1]+(x-1)[f(\gamma)-1]$ στο διάστημα $[1\ ,\ 2]$ που είναι συνεχής και $g(1)\cdot g(2)<0$

[Αφού η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ελάχιστο το 1 και λόγω της μονοτονίας της θα είναι $f(\beta)>1$ και $f(\gamma)>1$]

Από το θεώρημα Bolzano συνεπώς προκύπτει ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1\ ,\ 2)$

ΘΕΜΑ 4^0 :

α. Έχουμε $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{1}{2}$

Η συνάρτηση $t\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ και άρα η $H(x)$ θα είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,2]$.

Η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ και άρα η $\int_0^x f(t)dt$ θα είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,2]$. Έτσι για κάθε $x\in(0,2]$ η G θα είναι συνεχής (πράξεις συνεχών). Θα εξετάσουμε την συνέχεια στο σημείο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{H(x)}{x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{H'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}[xf(x)]=0f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt=\int_0^0 f(t)dt=0$$

Έτσι: $\lim\limits_{x\to 0}G(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt+3=3=G(0)$. Άρα η G είναι συνεχής στο $[0,2]$.

β.

$$G'(x) = \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x)}{x^2} - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) =$$

$$= -\frac{H(x)}{x^2}$$

γ. Η G είναι συνεχής στο [0,2] , παραγωγίσιμη στο (0,2) και

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt - \int_0^2 2f(t)dt}{2} + 3 \overset{\text{υπόθεση}}{=} 3 = G(0).$$ Άρα

από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $a \in (0,2)$ ώστε να ισχύει:

$$G'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(a)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow H(a) = 0$$

δ. Η G είναι συνεχής στο [0 , a] και παραγωγίσιμη στο (0 , a). Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, a)$ ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(a) - G(0)}{a - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(a)}{a} - \int_0^a f(t)dt + 3 - 3}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{-\int_0^a f(t)dt}{a} \Leftrightarrow aH(\xi) = -\xi^2 \int_0^a f(t)dt \Leftrightarrow a\int_0^\xi tf(t)dt = -\xi^2 \int_0^a f(t)dt$$