ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1995

ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 1995

ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1^{η})

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1^{O} :

Α. Έστω ν θετικός ακέραιος και **Ι , Ο,** είναι αντιστοίχως ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας ν x ν, τέτοιοι ώστε $\mathbf{A=B^2+I}$ και $\mathbf{B^4=O}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\mathbf{A^k=I+kB^2}$, για κάθε $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^*$, και

ii) ο πίνακας $\mathbf{I+A^6-A^8}$ είναι αντιστρέψιμος.

β) Αν ο ν είναι περιττός, να αποδείξετε ότι $\mathbf{|2A-3I| \leq 0}$.

Β. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 ισχύει : $\mathbf{|z_1|^2 + |z_1|^2 = |z_1-z_2|^2}$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(z_1\,\overline{z_2})=0$

β) Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]-\ \mathrm{R}$, συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbf{z=\alpha^2+if(\alpha)}$, $\mathbf{w= f(\beta)+i\beta^2}$ με $\mathbf{\alpha\beta \neq 0}$. Αν $\mathbf{|w|^2 + |z|^2 = |w-z|^2}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\mathbf{[\alpha,\beta]}$.

ΖΗΤΗΜΑ $2^{ο}$:

Α. Δίνονται οι ελλείψεις

$$c_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{και} \quad c_2 : a^2x^2 + \beta^2x^2 = 1$$ με **$0 < α < β$**.

Η ημιευθεία **$y=(εφθ)x,\ x>0,\quad 0<θ<π/2$** τέμνει την c_1 στο σημείο **$Γ_1(x_1 , y_1)$** και την c_2 στο σημείο **$Γ_2(x_2 , y_2)$**.

α) Αν **$λ_1$** είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της **c_1** στο σημείο **$Γ_1$** και **$λ_2$** είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της **c_2** στο σημείο **$Γ_2$** να αποδείξετε ότι το γινόμενο **$λ_1 \cdot λ_2$** είναι ίσον με **$(εφθ)^{-2}$** .

β) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$$f : (0, \frac{\pi}{2}) \to R$$ με **$f(θ)= λ_1 \cdot λ_2$** .

Β. Δίνεται θετικός ακέραιος αριθμός ν , τέτοιος ώστε **$(1+i)^{ν}=16$**. Έστω **$Ω=\{1,2,\ldots,ν\}$** είναι ένας δειγματικός χώρος , που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε τυχαίως ένα απλό ενδεχόμενο **$λ \in Ω$**.

Αν **$f(x)=2x^2 - 4x+λ$** , με **$x \in R$** , να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση **$f(x)=0$** να μην έχει πραγματικές ρίζες.

ΖΗΤΗΜΑ 3^{o} :

A. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί **κ , λ** με **κ<λ** και η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=(x-\kappa)^5\,(x-\lambda)^3}$ με $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$ για κάθε $\mathbf{x\neq\kappa}$ και $\mathbf{x\neq\lambda}$.

β) Η συνάρτηση **g(x)=ln|f(x)|** στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα **(κ , λ)** .

B. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση **f** συνεχή στο διάστημα **[α,β]** ισχύει: Αν **f΄(x) > 0** για κάθε $\mathbf{x} \in$ **(α,β)** , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο **[α,β]** .

β) Η συνάρτηση $f:\mathrm{R}-\ \mathrm{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι **f΄(x) > 0** , για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{a}^{\beta} \mathrm{f(x-t)dt}\quad,\quad \mathrm{x}\in\mathrm{R}$ με **α,β** πραγματικούς αριθμούς , είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}$ με **F΄(x)=0**, τότε **F(x)=0** για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$.

aris nikolaidis

ΖΗΤΗΜΑ 4^{o} :

Α. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς **α , β**, με

0 < α < β , τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την

οποία $\int_{a}^{\beta} f(t)dt = 0$ και τη συνάρτηση

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_{a}^{x} f(t)dt \quad , \quad x \in (0,+\infty) \ .$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{x_0} \in \mathbf{(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **g** στο σημείο $\mathbf{(x_0 , g(x_0))}$ να είναι παράλληλη στον άξονα **χ΄χ** .

β) $\mathbf{g(x_0)=2+f(x_0)}$.

Β. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν : **f(0)=1995** ,

f΄(0)=1 και $1+\int_{0}^{x} f''(t)\sigma\upsilon\nu t dt = \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_{0}^{x} f'(t)\eta\mu t dt$.