ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1994
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΙΟΥΛΙΟΥ 1994
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ ($4^{η}$)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ $1^{ο}$:

Α. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση

$f(x) = ax^2 - 2x\ln x$ με $x \in (0,+\infty)$.

(α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(1,f(1)) και να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο R, η οποία έχει συνεχή f΄΄ στο R, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0=2 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1) .

Αν ισχύει $\int_0^2 [x \cdot f''(x) + 3 \cdot f'(x)]dx = -\frac{8}{3}$ να υπολογίσετε το f(2) .

ΖΗΤΗΜΑ $2^{ο}$:

Α. Έστω Α , Β πίνακες ν Χ ν τέτοιοι ώστε Α+(Β – Ι)=ΑΒ –Ι , όπου Ι ο μοναδιαίος ν Χ ν πίνακας. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας (Α –Ι) αντιστρέφεται.

Β. Έστω Α ένας ν Χ ν πίνακας για τον οποίο υποθέτουμε ότι $I - A^2 + A^4 = O$, όπου Ι ο μοναδιαίος ν Χ ν πίνακας και Ο ο μηδενικός ν Χ ν πίνακας.

(α) Να αποδείξετε ότι $A^6 + I = O$, ότι ο Α έχει αντίστροφο και ότι $A^{-1} = -A^5$.

(β) Να αποδείξετε ότι $-A^{308} + (A^{-1})^{105} = A^2 + A^3$.

<u>ΖΗΤΗΜΑ 3$^{\text{Ο}}$:</u>

Α. Αν μία συνάρτηση f ,

- Είναι συνεχής στο διάστημα Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Β. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και Α , Β είναι υποσύνολα του Ω.

Έστω $P(A') \leq 0{,}28$ και $P(B') \leq 0{,}71$

Να αποδείξετε ότι :

(α) $P(A \cap B) \geq 1{,}01 - P(A \cup B)$

(β) το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το αδύνατο .

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4$^{\text{Ο}}$:</u>

Α. Έστω ότι η ευθεία $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

Να βρείτε τα όρια :

(α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x]$

(β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$$

Β. Να αποδείξετε ότι

(α) $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$.

(β) Η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μία λύση την x=0

aris nikolaidis