

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, με το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

β) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

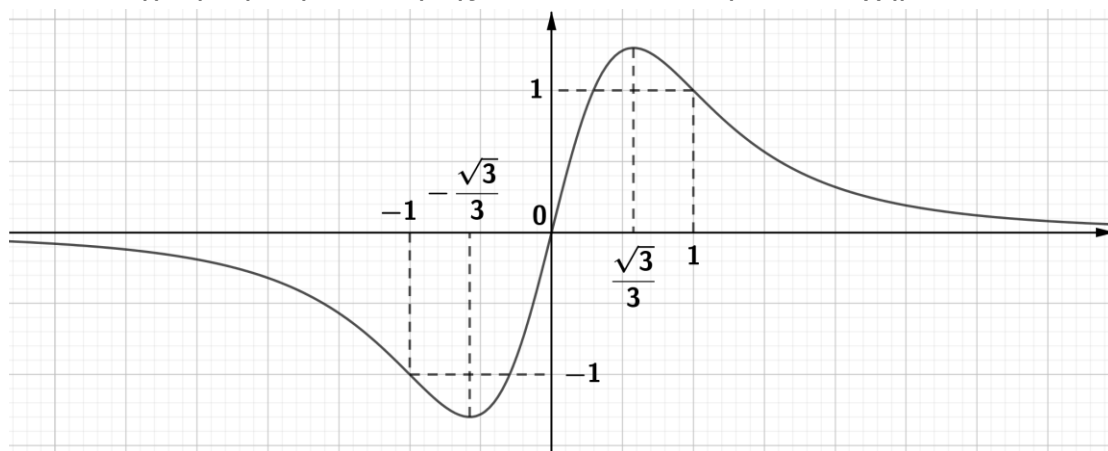
γ) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική τους παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής του.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- Η συνάρτηση f είναι άρτια.
- $f(-1) = 0$, $f(0) = 2f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$.

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x \eta \mu \frac{1}{x}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 2.$$

B1. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + 1}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 5

B2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 5

B3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης της f .

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Μονάδες 6

B5. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3**, **B4** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ να ισχύει: $(1-x)f(x) = x \ln x$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ -1, & x = 1 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2021 - \ln x)x = 2021$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \lambda, & -2 < x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,9)$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(x) + 1 > 2^{f(x)}$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)+2}{x-2} - \frac{\eta\mu(\pi\alpha)-2}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 9$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Μονάδες 7