

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α ΘΕΜΑ**

A1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα Δ .

Αν οι f, g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και

$f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει

σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

A2.(α) Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f σε ένα διάστημα Δ .

(β) Θεωρούμε την πρόταση

«Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι πάντα θέσεις ακροτάτων»

Να την χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή.

A3. Το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με (επιλέξτε το σωστό)

α. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ β. $\frac{4}{3}$ γ. $\sqrt{3}$ δ. $\frac{3}{4}$.

A4. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να γράψετε τη γεωμετρική του σημασία.

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \sqrt{|x|}$, αποτελείται από την γραφική παράσταση της $y = \sqrt{x}$ και από την συμμετρική αυτής ως προς τον άξονα $y'y$.

ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x - 1}$ είναι καλώς ορισμένο.

iii. Η εικόνα $f(\Delta)$ του διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

iv. Αν για μία συνάρτηση f , ορισμένη στο A , υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, όπου $x_0 \in A$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

v. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι μέγιστο αυτής.

Β ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$, $x \in A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

B1. Να προσδιορίσετε την μονοτονία και το σύνολο τιμών της f .

B2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.

B3. Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη (ε) της C_f , στο τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$,

με $x_0 > 1$, σχηματίζει με την κατακόρυφη και οριζόντια ασύμπτωτη τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν.

B4. Να εκφράσετε τον ρυθμό μεταβολής της f ως συνάρτηση του $f(x)$.

Γ ΘΕΜΑ

Για την συνάρτηση f για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$1 + \alpha x \leq f(x) \leq x^2 + \alpha \quad (1) \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ,παράμετρος.}$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

Γ2. Να δείξετε ότι $f(1) = 3$ και $f'(1) = 2$.

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 6x - x^3$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ4. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι

(α) η συνάρτηση h με $h(x) = [f(x) - 3] \cdot \eta\mu x$ έχει στο διάστημα $(0, 1)$ κρίσιμο σημείο.

(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $f(\xi) + f'(\xi) \varepsilon\phi\xi = 3$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^4 + x^2 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{2x} + 32x^3 + 4x > e^2 + 36$ (1).

Δ3. Να δείξετε ότι το σημείο $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f και μετά

(α) Να δείξετε ότι το $f(0)$ είναι ακρότατο και να βρείτε το είδος του.

(β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 3}$.

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-3}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ