5^{Ο} ΛΥΚΕΙΟ ΛΑΡΙΣΑΣ **Π Α Ν Ε Λ Λ Α Δ Ι Κ Ε Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ**

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Π Ρ Ο Σ Α Ν Α Τ Ο Λ Ι Σ Μ Ο Υ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε Σωστή **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)** καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις.

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)<f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)>0$.

β) Αν ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε υπάρχει σταθερά **c**, ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

δ) Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και για κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και έχει σύνολο τιμών το $[f(\alpha),f(\beta)]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

Α2. Διατυπώστε το **κριτήριο παρεμβολής**.

Μονάδες 4

Α3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α , β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής.**

Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α , β).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{e^x-1}+2020$ και $g(x)=\ln(x-2)$

Β1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού Α , Β των f , g αντίστοιχα και να δειχθεί ότι η f είναι ′′ 1 – 1 ′′ στο Α.

Μονάδες 5

Β2. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών $f(A)$ και $g(B)$ των f , g αντίστοιχα και να οριστεί η f^{-1}.

Μονάδες 5

Β3. Να οριστεί η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$.

Μονάδες 5

Β4. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(x)=-\ln(h(x)-2021)+\left(\frac{1}{e}\right)^{x-7}$.

Ι) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της φ και να δειχθεί ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

ΙΙ) Να λυθεί η εξίσωση: $\varphi(x)=1$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $(-1,+\infty)$ με:

$$f(x)=\ln(x+1) \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{x+1}$$

Γ1. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης: $\phi(x)=f(x)+g(x)$

Γ2. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $\varepsilon: y=x$.

Γ3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ΄΄κάτω΄΄ από την ευθεία $\varepsilon: y=x$.

Γ4. Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του **x** αυξάνεται με ρυθμό $2\,cm/sec$.

Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα **x΄x** και $A(0,\alpha)$, $\alpha>0$ σταθερό σημείο του άξονα **y΄y**, τότε να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού **Ε** του τριγώνου **ΑΜΝ** κάθε χρονική στιγμή **t** ισούται με $\phi(x(t))$.

Γ5. Τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου **ΑΜΝ** είναι ίσος με $\left(2\cdot\ln3+\frac{8}{9}\right)cm^2/sec$, να δείξετε ότι η τετμημένη $x(t_0)$ του σημείου Μ είναι ίση με 8.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=0$ και

$$0 \leq f(x)+16 \leq (x+1)\cdot f'(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

Δ1. $f'(-1)=0$ και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Δ2. $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$ και $e^x - x \ge 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Δ3. Η εξίσωση $f(2e^x - x) = f(x^2 - x + 2)$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Δ4. Υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (0\,,\,1)$ ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x^2)}{x(1-x)} \quad , \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x)}{x-1}$$

Μονάδες 6

Δ5. $(X+1)\cdot f(x) < f(x^2)$ για κάθε $x \in (0\,,\,1)$.

Μονάδες 5

Ε Π Ι Μ Ε Λ Ε Ι Α

ΘΩΜΑΣ ΛΑΝΤΟΣ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ