

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 1

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^a$ ,  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει ότι  $(x^a)' = ax^{a-1}$  **(Μονάδες 7)**

**A2.** Θεωρήστε τον ισχυρισμό: « Αν  $f(x) \cdot g(x) = 0$ , για κάθε  $x \in A$ , τότε είναι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in A$  ή  $g(x) = 0$ ,  $x \in A$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως **Αληθή**, εάν είναι αληθής ή **Ψευδή**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

**(Μονάδες 4)**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής.

**(Μονάδες 4)**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , τότε η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

β. Αν μία συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε δεν είναι και αντιστρέψιμη.

γ. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$  σε οποιοδήποτε σημείο της  $x_0 \in \mathbb{R}$ , δεν έχει με τη γραφική παράσταση της  $f$  άλλο κοινό σημείο εκτός του  $x_0$ .

δ. Αν  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$

ε. Αν  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ , τότε  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$

**(Μονάδες 10)**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{5x}{4-x^2}$

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι  $f$  είναι περιττή.

**(Μονάδες 4)**

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**(Μονάδες 6)**

**B3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**(Μονάδες 4)**

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**(Μονάδες 4)**

**B5.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**(Μονάδες 7)**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 1 \\ \beta + \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και έχει οριζόντια

ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y=4$ , τότε:

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $\alpha=3$  και  $\beta=4$

**(Μονάδες 4)**

**Γ2.** i) Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  και να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (μονάδες 6)

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . (μονάδες 4)

**(Μονάδες 10)**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι:  $2f(3) > f(2) + f(4)$

**(Μονάδες 6)**

**Γ4.** Ένα σημείο  $M$  ξεκινά από το  $A(1, 4)$  και κινείται πάνω στην καμπύλη της  $f$ . Η ταχύτητα της τεταγμένης του σημείου είναι  $0,5\mu/s$ . Να βρείτε την ταχύτητα της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή  $t_0$ , όπου  $x(t_0) = e^2$ .

**(Μονάδες 5)**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται πραγματική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=0$
- $f'(x) = 2(x-1)f(x) + e^{x^2-2x}$

**Δ1.** Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

**(Μονάδες 6)**

Αν  $f(x) = (x-1)e^{x^2-2x}$ ,

**Δ2.** Να μελετήσετε την μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε εάν υπάρχουν ακρότατα ή σημεία καμπής.

**(Μονάδες 6)**

**Δ3.** Αν  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(1,0)$ , να αποδείξετε ότι η  $\varepsilon$  δεν έχει, εκτός του  $A$ , άλλο κοινό σημείο με τη  $C_f$ .

**(Μονάδες 7)**

**Δ4.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(2\eta\mu^2 x) \leq 0$ , για  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

**(Μονάδες 6)**