10. ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

10.1 Πως κατασκευάζουμε μια γραφική παράσταση

Κατά τη μελέτη ενός φαινομένου στο εργαστήριο καταγράφουμε τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων και των μετρήσεών μας σε πίνακες. Οι πίνακες αυτοί μας δίνουν μία σειρά από πληροφορίες για την εξέλιξη του φαινομένου.

Μπορούμε να έχουμε μία απλή και παραστατική εικόνα της σχέσης (αλληλοεξάρτησης) δύο φυσικών μεγεθών, αν με βάση τον πίνακα τιμών κατασκευάσουμε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης δύο φυσικών μεγεθών - μεταβλητών, εργαζόμαστε ως εξής:

Χαράσσουμε σε χαρτί, συνήθως χιλιοστομετρικό (μιλιμετρέ) δύο ημιευθείες κάθετες μεταξύ τους (τους άξονες συντεταγμένων). Στον οριζόντιο άξονα (άξονα των τετμημένων) τοποθετούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή γράφοντας το όνομα (ή το σύμβολο) του φυσικού μεγέθους μαζί με την μονάδα στην οποία μετρήθηκε. Στον κατακόρυφο άξονα τοποθετούμε την εξαρτημένη μεταβλητή.

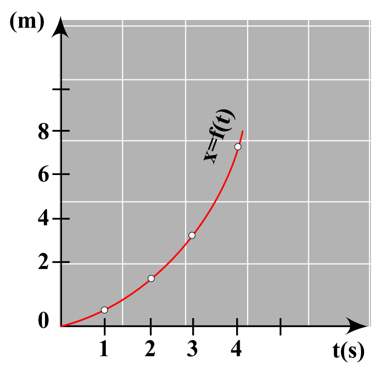
Βαθμονομούμε κατόπιν τους δύο άξονες. Θεωρούμε ως σημείο μηδέν για τον κάθε άξονα το σημείο τομής τους (αρχή των συντεταγμένων). Χωρίζουμε τον οριζόντιο άξονα σε ίσα διαστήματα έτσι, ώστε το καθένα να αντιπροσωπεύει τη μονάδα ή ίσο αριθμό μονάδων της ανεξάρτητης μεταβλητής. Σε κάθε υποδιαίρεση του άξονα σημειώνουμε την αντίστοιχη τιμή (αριθμό μονάδων μέτρησης) της ανεξάρτητης μεταβλητής. Έτσι επάνω στον οριζόντιο άξονα σχηματίζεται μία βαθμονομημένη κλίμακα. Όμοια εργαζόμαστε για να βαθμονομήσουμε τον κατακόρυφο άξονα.

Μετά τη βαθμονόμηση σημειώνουμε στο επίπεδο των αξόνων τα πειραματικά σημεία κατά το γνωστό από τα Μαθηματικά τρόπο. Σε κάθε ζεύγος τιμών του πίνακα μετρήσεων αντιστοιχεί ένα πειραματικό σημείο. Δια μέσου των σημειωμένων πειραματικών σημείων χαράσσουμε την καλύτερη γραμμή, δηλαδή την ομαλή γραμμή που προσεγγίζει περισσότερο τα σημεία ή διέρχεται από αυτά.

ΠΙΝΑΚΑΣ

χρόνος t (s)	Απόσταση x (m)
0	0
1	0,5
2	2,0
3	4,5
4	8,0

Η γραφική παράσταση της απόστασης x συναρτήσει του χρόνου t σε μία ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση



<u>Σημείωση 1η</u>:

Επάνω σε κάθε άξονα σημειώνουμε τις τιμές της κλίμακας όχι όμως και τις τιμές των πειραματικών μετρήσεων.

<u>Σημείωση 2η</u>:

Η εκλογή των κλιμάκων για τους δύο άξονες πρέπει να είναι τέτοια, ώστε τα πειραματικά σημεία να καλύπτουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος από το χαρτί σχεδίασης.

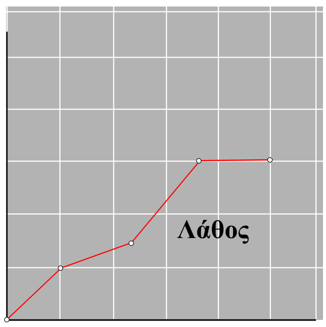
<u>Σημείωση 3η</u>:

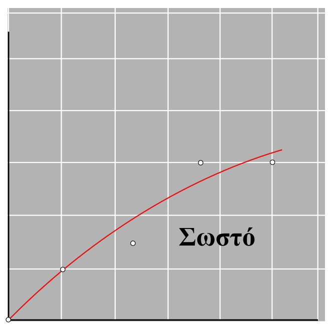
Η κάθε υποδιαίρεση της κλίμακας στους άξονες πρέπει να είναι ίση ή ακέραιο πολλαπλάσιο των αριθμών 1,2,5,10.

Αυτή η επιλογή μας διευκολύνει να προσδιορίζουμε τα σημεία που αντιστοιχούν σε τιμές ενδιάμεσες από αυτές που έχουν σημειωθεί.

<u>Σημείωση 4^{η}:</u>

Συνδέουμε τα πειραματικά σημεία με ομαλή γραμμή και όχι τεθλασμένη. Όταν δεν μπορούμε να φέρουμε ομαλή γραμμή που να διέρχεται από τα σημεία, τότε χαράσσουμε την ομαλή γραμμή που τα προσεγγίζει και τα κατανέμει ισόρροπα από τη μια και την άλλη πλευρά.





10.2 Γραφικές παραστάσεις μερικών απλών συναρτήσεων

<u>Γραφική παράσταση ευθέως αναλόγων ποσοτήτων</u>

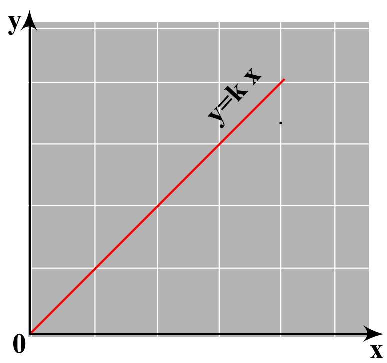
Στον ΠΙΝΑΚΑ φαίνεται ότι, όταν η μεταβλητή x (ανεξάρτητη μεταβλητή) διπλασιάζεται, τότε και η μεταβλητή y (εξαρτημένη μεταβλητή) διπλασιάζεται, όταν η x τριπλασιάζεται, τότε και η y τριπλασιάζεται κ.ο.κ. Λέμε ότι η y είναι ευθέως ανάλογη της x ή συμβολικά $y \propto x$.

Ισχύει $\frac{y}{x} = k$ όπου k είναι η σταθερά αναλογίας ή $y=kx$

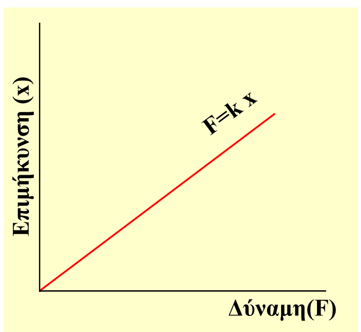
Για μία εξίσωση, όπως η $y=kx$, η γραφική παράσταση είναι ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΠΙΝΑΚΑΣ

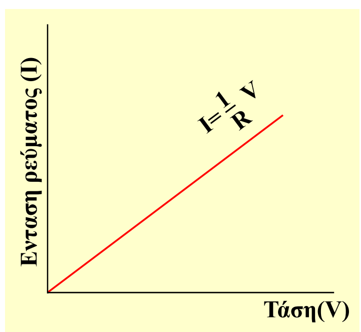
x	y
1	3
2	6
3	8
4	10



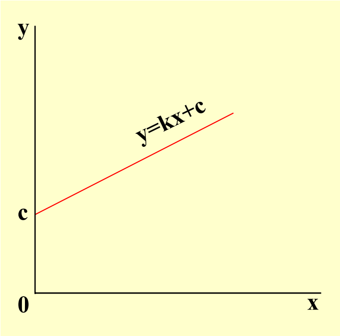
Παραδείγματα



Γραφική παράσταση της σχέσης μεταξύ δύναμης και επιμήκυνσης ελατηρίου (Νόμος του Hooke)



Γραφική παράσταση της σχέσης μεταξύ τάσης και έντασης ηλεκτρικού ρεύματος (Νόμος του Ohm).



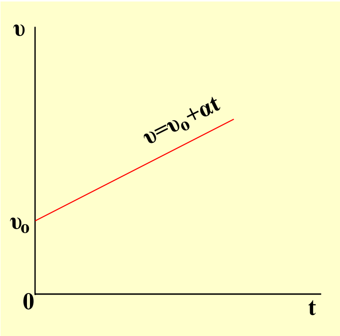
<u>**Γραφική παράσταση ποσοτήτων που μεταβάλλονται γραμμικά αλλά όχι ευθέως ανάλογα**</u>

Η σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y είναι

$$y = kx + c$$

όπου k και c είναι σταθερές ποσότητες.

Για τη συνάρτηση αυτή η γραφική παράσταση είναι ευθεία, η οποία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η αρχή της ευθείας είναι το σημείο (0, c)



Παράδειγμα

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_0 ισχύει η εξίσωση

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$$

όπου υ η ταχύτητα του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t, υ_0 η αρχική του ταχύτητα και α η επιτάχυνσή του.

Η γραφική παράστασή της είναι ευθεία.

Η αρχή της ευθείας είναι το σημείο (0, υ_0).

<u>**Γραφική παράσταση αντιστρόφως αναλόγων ποσοτήτων**</u>

Στον ΠΙΝΑΚΑ φαίνεται ότι, όταν η μεταβλητή x διπλασιάζεται, τότε η y γίνεται η μισή, όταν η μεταβλητή x τριπλασιάζεται, τότε η y γίνεται το 1/3 κ.ο.κ. Λέμε ότι η y είναι αντιστρόφως ανάλογη της x ή συμβολικά $y \propto \frac{1}{x}$. Επειδή στις αντιστρόφως ανάλογες ποσότητες το γινόμενο δύο αντίστοιχων τιμών είναι σταθερό, μπορούμε να γράψουμε.

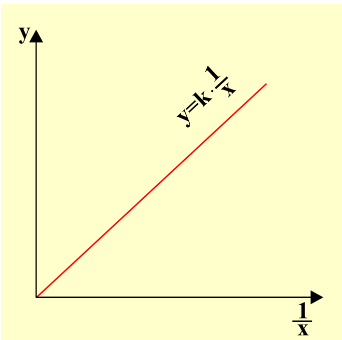
ΠΙΝΑΚΑΣ

x	y
1	12
2	6
3	4
4	3

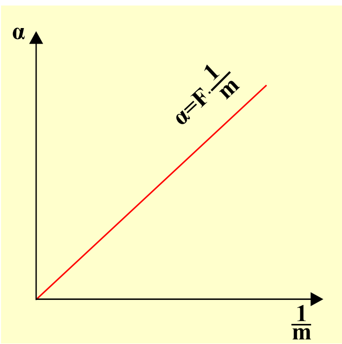
$$xy = k$$

όπου k είναι μία σταθερά

$$\text{ή } y = k\frac{1}{x}$$



Η γραφική παράσταση της y συναρτήσει της x είναι μία καμπύλη. Αν όμως θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή την ποσότητα $\frac{1}{x}$, τότε η γραφική παράσταση που θα προκύψει είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

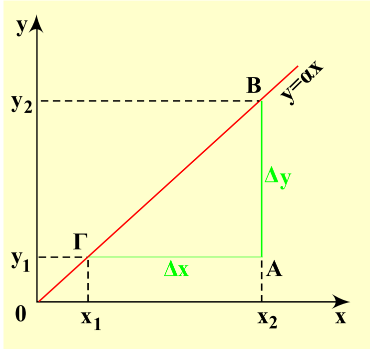


Παράδειγμα

Για σταθερή δύναμη F, η επιτάχυνση α που αποκτά ένα σώμα είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του.

$$\alpha = F\frac{1}{m}$$

10.3 Η κλίση της γραμμής σε μία γραφική παράσταση



Κλίση γραμμικής συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση μιας γραμμικής συνάρτησης π.χ. της $y = \alpha x$, η οποία είναι ευθεία.

Για να βρούμε την κλίση της ευθείας, σχεδιάζουμε ένα μεγάλο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπως φαίνεται στην εικόνα. Βρίσκουμε τις τιμές των δύο κάθετων πλευρών του στις αντίστοιχες μονάδες των αξόνων.

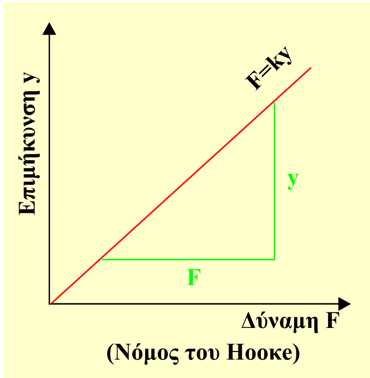
$$AB = \Delta y = y_2 - y_1$$

και $$\Gamma A = \Delta x = x_2 - x_1$$

Υπολογίζουμε έπειτα την κλίση της γραφικής παράστασης από το λόγο των δύο αυτών πλευρών του τριγώνου

$$\text{Κλίση} = \frac{AB}{\Gamma A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

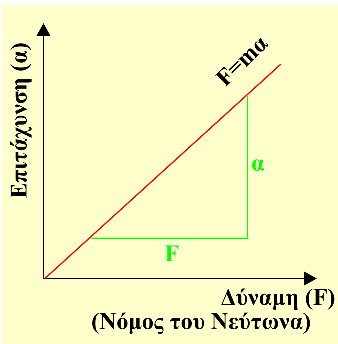
Φυσική σημασία της κλίσης σε γραφικές παραστάσεις



Η κλίση γραφικής παράστασης έχει σε πολλές περιπτώσεις κάποια φυσική σημασία: είναι ίση με την τιμή κάποιου φυσικού μεγέθους.

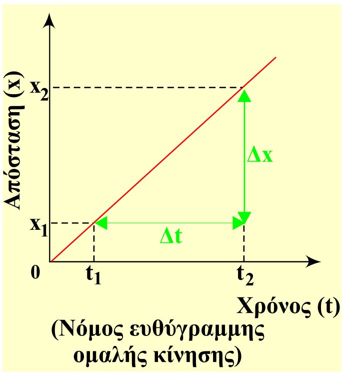
Η κλίση στη γραφική παράσταση της επιμήκυνσης συναρτήσει της δύναμης είναι ίση με το αντίστροφο της σταθεράς k του ελατηρίου

$$\frac{y}{F} = \frac{1}{k}$$



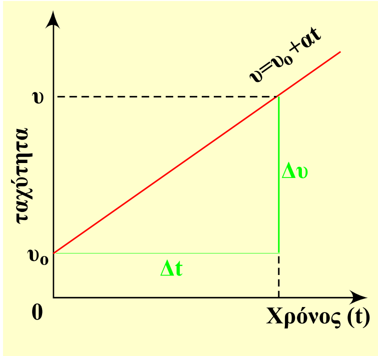
Η κλίση στη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης συναρτήσει της δύναμης είναι ίση με το αντίστροφο της μάζας m του σώματος

$$\frac{\alpha}{F} = \frac{1}{m}$$



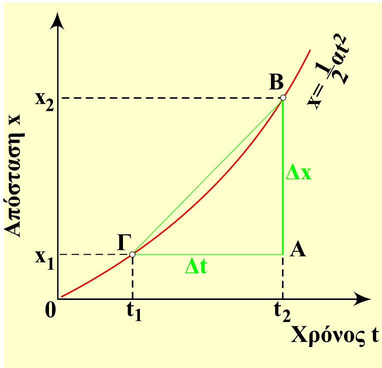
Η κλίση στη γραφική παράσταση της απόστασης συναρτήσει του χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι ίση αριθμητικά με την ταχύτητα του κινητού

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \upsilon$$



Η κλίση στη γραφική παράσταση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι ίση αριθμητικά με την επιτάχυνση του κινητού

$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \alpha$$

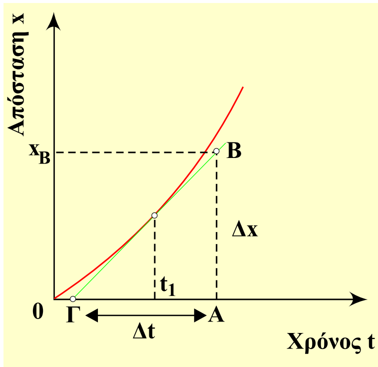


<u>Κλίση σε μη γραμμική συνάρτηση</u>

Όταν η γραφική παράσταση είναι καμπύλη γραμμή μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση της για δύο σημεία της ή για ένα.

Η κλίση στη γραφική παράσταση της απόστασης συναρτήσει του χρόνου για δύο σημεία της καμπύλης είναι ίση με την αριθμητική τιμή της μέσης ταχύτητας υ_μ του κινητού.

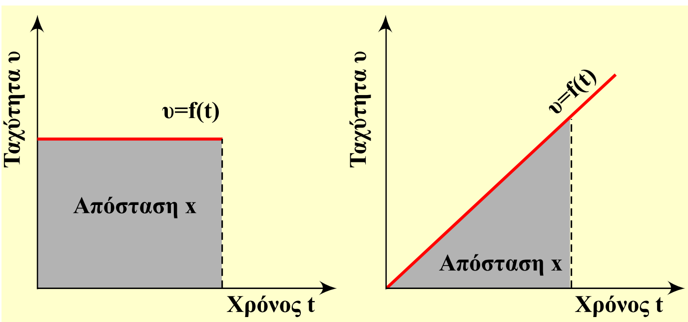
$$\frac{AB}{\Gamma A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



Η κλίση στη γραφική παράσταση της απόστασης συναρτήσει του χρόνου σε ένα σημείο (δηλαδή σε μια χρονική στιγμή t_1) βρίσκεται, αν φέρουμε την εφαπτομένη στο σημείο αυτό και σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με την τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας του κινητού.

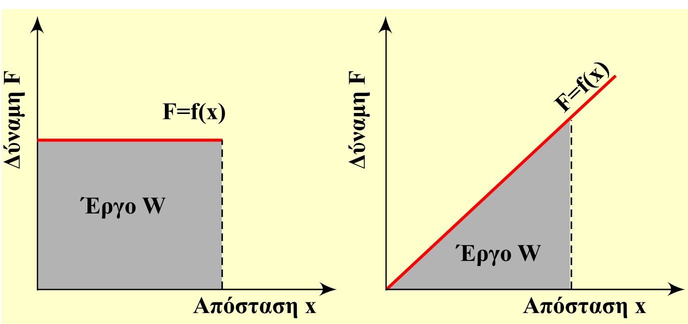
$$\frac{AB}{\Gamma A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B}{\Delta t} = \upsilon$$

10.4 Το εμβαδόν γραφικής παράστασης



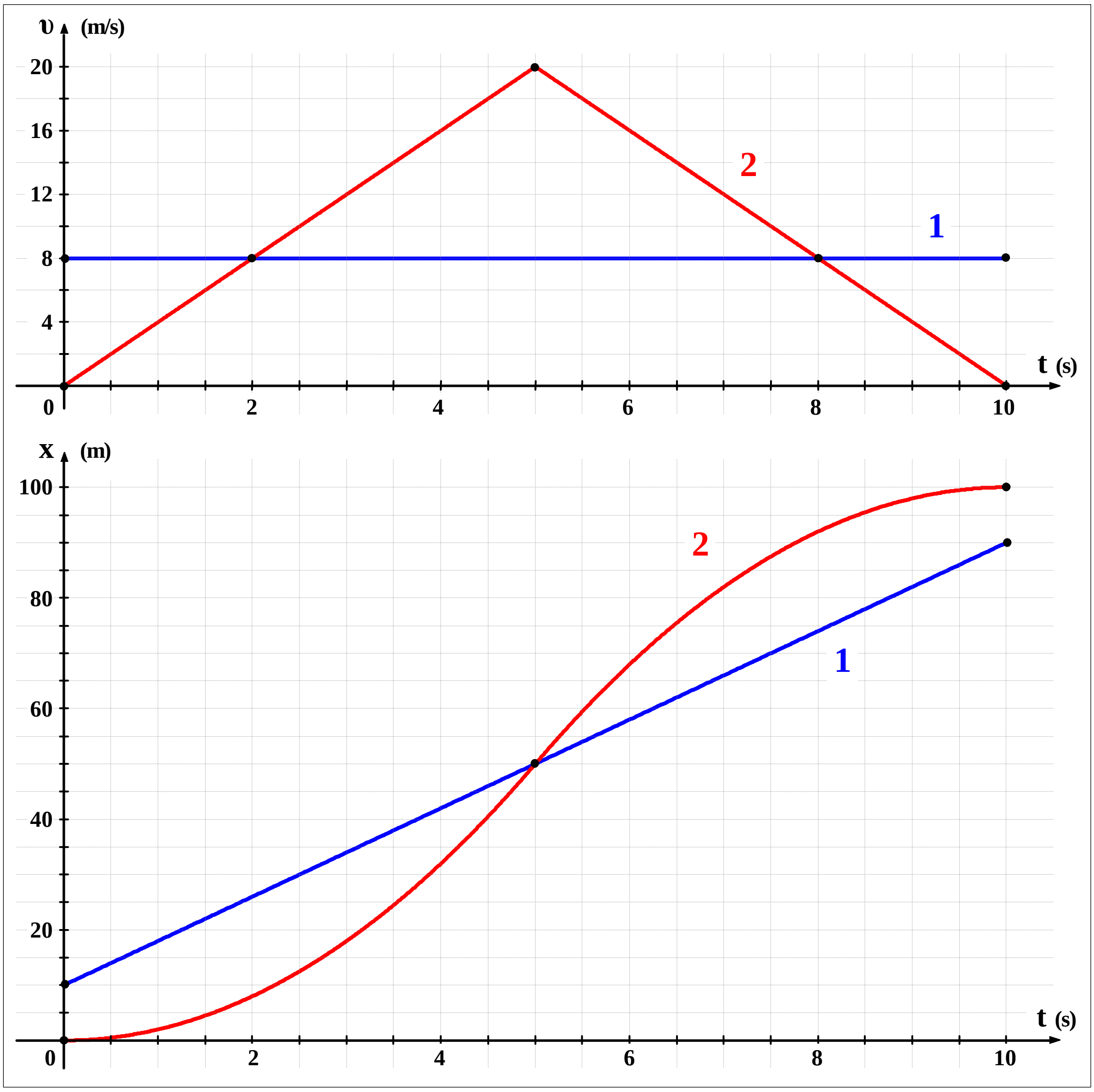
Σε πολλές περιπτώσεις το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραμμή της συνάρτησης y=f(x), από τον άξονα των τετμημένων και τα όρια μεταβολής της τετμημένης έχει αξιοσημείωτη φυσική σημασία.

Σε κάθε διάγραμμα το εμβαδόν είναι ίσο αριθμητικά με την απόσταση x που διήνυσε το κινητό.



Σε κάθε διάγραμμα το εμβαδόν είναι ίσο αριθμητικά με το έργο W που παρήγαγε η δύναμη F.

Εξάσκηση στα διαγράμματα υ – t και x – t



Δύο αυτοκίνητα A_1 και A_2 κινούνται ευθύγραμμα στον ίδιο δρόμο και ένας πεζός στέκεται στο δρόμο και αρχίζει να παρατηρεί τις δύο κινήσεις τους τη χρονική στιγμή $\mathbf{t_o=0}$.

Στα πιο πάνω διαγράμματα απεικονίζονται οι ταχύτητες $\mathbf{υ_1}$, $\mathbf{υ_2}$ και οι θέσεις $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ των δύο αυτοκινήτων σε συνάρτηση με το χρόνο **t**, όπως τις καταγράφει ο πεζός, από τη στιγμή μηδέν μέχρι τη στιγμή **t=10s** (δηλαδή για: $\mathbf{0 \le t \le 10s}$).

1. Από **0** έως **2s** τα δύο αυτοκίνητα κινούνται ομαλά. **Σ Λ**

2. Από **0** έως **10s** το A_1 κάνει ομαλή κίνηση ενώ το A_2 κάνει ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. **Σ Λ**

3. Τη στιγμή **t=0** τα δύο αυτοκίνητα βρίσκονται στην ίδια θέση. **Σ Λ**

4. Τη στιγμή **t=5s** το A_1 έχει μετατοπιστεί κατά **50m**. Σ Λ

5. Τα A_1, A_2 συναντώνται δύο φορές στο χρονικό διάστημα των **10s**. Σ Λ

6. Τη στιγμή **t=5s** το A_2 προλαβαίνει το A_1 και το προσπερνά. Σ Λ

7. Οι μετατοπίσεις των δύο αυτοκινήτων κατά το χρονικό διάστημα από **0** έως **5s** είναι ίσες. Σ Λ

8. Η μετατόπιση του A_2 στη διάρκεια των **10s** είναι κατά **20m** μεγαλύτερη από αυτή του A_1. Σ Λ

9. Το A_1 κινείται πιο αργά από το A_2 για χρονικό διάστημα **6s**. Σ Λ

10. Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\upsilon_1(t)$ και τον άξονα των χρόνων, από **0** έως **10s**, εκφράζει τη θέση στην οποία έχει φτάσει το A_1 τη στιγμή **10s**. Σ Λ

11. Η επιτάχυνση του 2ου αυτοκινήτου τη στιγμή **2s** είναι $\alpha=4m/s^2$. Σ Λ

12. Τη στιγμή **8s** το A_2 έχει πάλι ίδια επιτάχυνση $\alpha'=4m/s^2$. Σ Λ

13. Η κίνηση του 2ου αυτοκινήτου από **0** έως **5s** είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, ενώ από **5s** έως **10s** ομαλά επιβραδυνόμενη με αρχική ταχύτητα **20m/s**. Σ Λ

14. Η εξίσωση της ταχύτητας του A_2 είναι στο S.I. (επιλέξτε το σωστό):

Α. $\upsilon_2 = \begin{cases} 4\cdot t & (0 \le t < 5) \\ 20 - 4\cdot t & (5 \le t \le 10) \end{cases}$ **Β.** $\upsilon_2 = \begin{cases} 4\cdot t & (0 \le t < 5) \\ 20 - 4\cdot (t-5) & (5 \le t \le 10) \end{cases}$

15. Η εξίσωση της θέσης του A_2 είναι στο S.I. (επιλέξτε το σωστό):

Α. $x_2 = \begin{cases} 2\cdot t^2 & (0 \le t < 5) \\ 50 + 20\cdot t - 2\cdot (t-5)^2 & (5 \le t \le 10) \end{cases}$

Β. $x_2 = \begin{cases} 2\cdot t^2 & (0 \le t < 5) \\ 20\cdot t - 2\cdot (t-5)^2 & (5 \le t \le 10) \end{cases}$

16. Η εξίσωση της θέσης του A_1 είναι στο S.I. (επιλέξτε το σωστό):

Α. $x_1 = 8\cdot t \quad (0 \le t \le 10)$ **Β.** $x_1 = 10 + 8\cdot t \quad (0 \le t \le 10)$

17. Ένας δεύτερος πεζός αρχίζει να παρατηρεί την κίνηση των δύο αυτοκινήτων αργότερα από τον πρώτο και συγκεκριμένα τη στιγμή που το ένα αυτοκίνητο προσπερνά το άλλο! Η στιγμή έναρξης της παρατήρησης είναι για τον 2ο πεζό (επιλέξτε το σωστό):

Α. $t_o = 0s$ **Β.** $t_o = 5s$ **Γ.** $t_o = 10s$

18. Τώρα το δύσκολο! Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της θέσης των δύο αυτοκινήτων στο S.I., όπως ισχύουν για τον 2^{ο} πεζό:

$\boldsymbol{\upsilon_1 =}$ ……	$\mathbf{x_1 =}$ …… **+ 8·(t–……)**	$(0 \le t \le 10)$

$\boldsymbol{\upsilon_2 =}$ …… **+ 4·(t–……)**	$\mathbf{x_2 =}$ …… **+** ……**·(t–……) + 2·(t–……)²**	$(0 \le t <$ ……$)$
$\boldsymbol{\upsilon_2 =}$ …… **– 4·(t–……)**	$\mathbf{x_2 =}$ …… **+** ……**·(t–……) – 2·(t–……)²**	(…… $\le t < 10)$

19. Και τώρα το … *ακατόρθωτο*! Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας και της θέσης του 2^{ου} αυτοκινήτου στο S.I., για την επιταχυνόμενη μόνο κίνησή του (δηλαδή από **0** έως **5s**), θεωρώντας όμως ως στιγμή … «έναρξης» της παρατήρησης τη στιγμή $\mathbf{t_o}$**=10s** !

$\boldsymbol{\upsilon_2 =}$ …… **+ 4·(t–……)**	$\mathbf{x_2 =}$ …… **+** ……**·(t–……) + 2·(t–……)²**	$(0 \le t < 5)$

20. Και τέλος ένα κάπως πιο εύκολο, για να … συνέλθουμε από το προηγούμενο! Αν τη στιγμή **10s** μηδενιστεί η επιτάχυνση του 2^{ου} αυτοκινήτου, ποια στιγμή θα βρεθούν ξανά και τα δύο αυτοκίνητα στην ίδια θέση;

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....