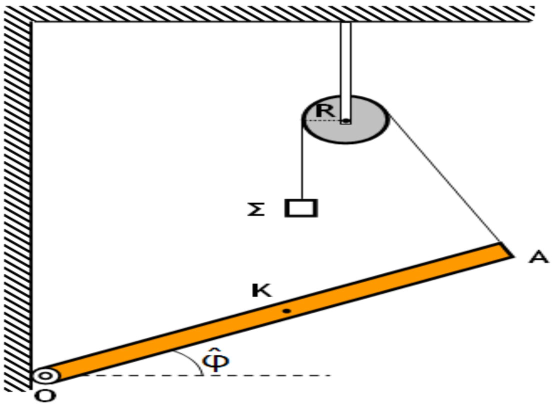
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Η λεπτή, ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μήκος L, μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα (άρθρωση) που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο Α της ράβδου είναι δεμένο ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου είναι αναρτημένο, μέσω τροχαλίας ακτίνας R, ένα σώμα Σ μάζας $m_1 = 0,1\sqrt{5}\ kg$.



Το νήμα είναι κάθετο στη ράβδο ΟΑ στο άκρο της Α. Η ράβδος, το σώμα Σ και η τροχαλία ισορροπούν ακίνητα, με τη ράβδο να σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^0$ με το οριζόντιο δάπεδο. Να βρείτε:

α) το μέτρο της τάσης T_1 του νήματος στο σημείο Α.

β) τη μάζα M της ράβδου.

γ) το μήκος L της ράβδου, αν η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο είναι $I_O = 15\sqrt{10} \cdot 10^{-4}\ kgm^2$.

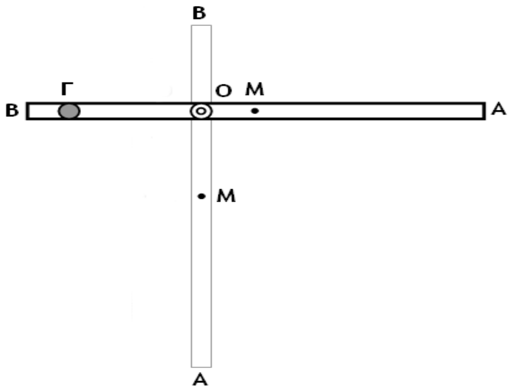
δ) Το μέτρο της δύναμης F που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

Δίνονται: Η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται απο το κέντρο μάζας είναι

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ml^2$$

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

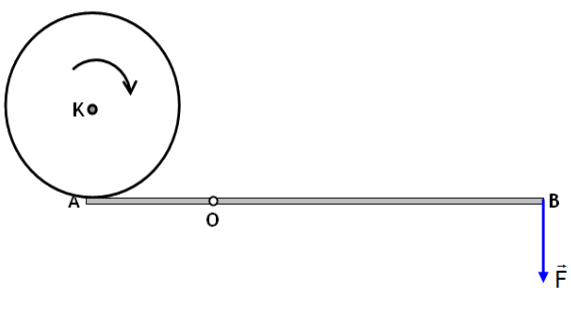
Λεπτή ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΒΑ με μήκος $L = 0,6\sqrt{3}\ m$ και μάζα $M = 5\ kg$ ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σημείο της Ο υπάρχει ακλόνητη οριζόντια άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, ενώ στο σημείο Γ υπάρχει στερεωμένο αμελητέων διαστάσεων σφαιρίδιο μάζας m_1. Η απόσταση (ΓΟ) είναι ίση με $30\ cm$, ενώ η απόσταση (ΟΜ) είναι ίση με $10cm$, όπου Μ είναι το μέσο της ράβδου ΒΑ.



α) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1.
β) Ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία προσκολλάμε στο σημείο Μ σημειακή μάζα $m_2 = \frac{65}{99} kg$ με συνέπεια η ράβδος υπό την επίδραση της βαρύτητας να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από το σημείο Ο.
Να υπολογίσετε:
β1) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο Ο.
β2) Τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος ράβδου-μαζών στην οριζόντια θέση αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m_2.
β3) Τη στροφορμή συστήματος ράβδου-μαζών στην κατακόρυφη θέση.
Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$, $g = 10 \ \frac{m}{s^2}$.

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**

Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα $R = 0,1 \ m$ και στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με στροφορμή μέτρου $L_0 = 20 \ \frac{kgm^2}{s}$. Η ράβδος ΑΟΒ του σχήματος έχει μήκος $d = 0,4 \ m$, είναι αβαρής και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που περνά από το σημείο Ο και είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής του τροχού. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο άκρο Β της ράβδου κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F = 400 \ N$ με αποτέλεσμα η ράβδος να εφάπτεται στον τροχό στο άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, ενώ ο τροχός, λόγω τριβών στο σημείο επαφής με τη ράβδο, επιβραδύνεται και τελικά σταματά. Η τριβή ολίσθησης που ασκεί η ράβδος στον τροχό, όσο αυτός περιστρέφεται, έχει μέτρο $T_{ολ} = 10 \ N$.



Να βρείτε:
α) Την απόσταση (ΑΟ).

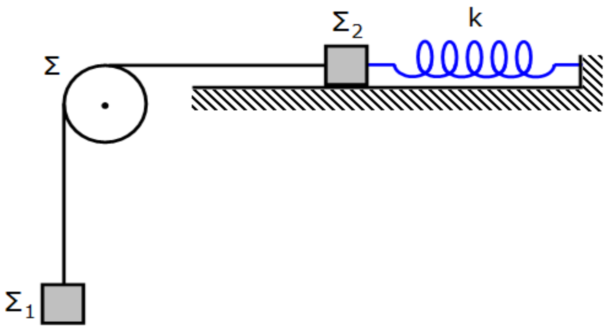
β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τροχού, $\frac{dL}{dt}$, κατά τη διάρκεια της στροφικής του κίνησης.

γ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού, $\frac{dK}{dt}$, τη στιγμή που το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας είναι το μισό από το αρχικό.

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο τροχός ακινητοποιείται καθώς και τη μέση ισχύ $|P_\mu|$ της ροπής που τον ακινητοποίησε (σε απόλυτη τιμή).
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = 2\ kgm^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχού και της ράβδου $\mu = 0,1$.

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**

Η τροχαλία Σ του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα της, είναι $I = 0,01\ kgm^2$ και η ακτίνα της είναι $R = 0,1\ m$. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Στη μία άκρη του νήματος έχει αναρτηθεί το σώμα $Σ_1$. Στην άλλη άκρη του νήματος έχει προσδεθεί το σώμα $Σ_2$, το οποίο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα ισορροπεί ακίνητο με τη βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$, στο οποίο έχει προσδεθεί στο ένα άκρο του το σώμα $Σ_2$ και το άλλο άκρο του σε ακλόνητο στήριγμα. Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουν μάζα $m = 1\ kg$ το καθένα.



α) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $F_{\varepsilon\lambda}$ που ασκεί το ελατήριο στο σώμα $Σ_2$, όταν το σύστημα ισορροπεί.

β) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβουμε το νήμα στο σημείο που συνδέει το σώμα $Σ_2$ με την τροχαλία, με αποτέλεσμα η τροχαλία να ξεκινήσει να περιστρέφεται και το σύστημα ελατήριο – $Σ_2$ να ξεκινήσει απλή αρμονική ταλάντωση.
Να βρείτε:

β1) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ της τροχαλίας.

β2) Πόσο έχει κατέβει το σώμα $Σ_1$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή

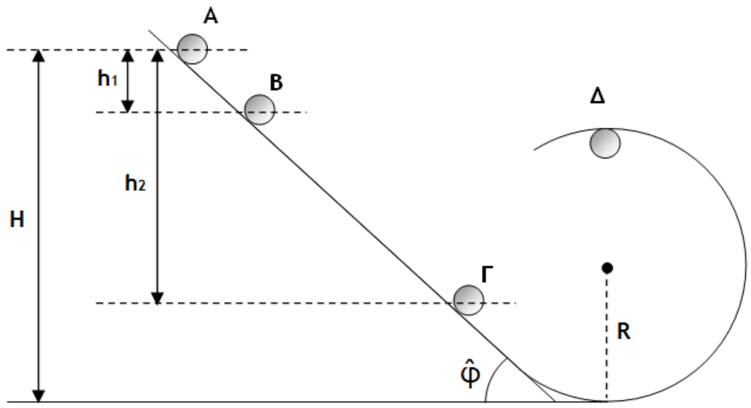
t_1 κατά την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο – Σ_2.

β3) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή t_1 όπως αυτή καθορίζεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Δίνεται: $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5**

Μια συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας $m = 0,7\ kg$ και ακτίνας r, αφήνεται από το σημείο Α ενός πλάγιου επιπέδου που σχηματίζει γωνία $\hat{\varphi}$ με το οριζόντιο δάπεδο. Το σημείο Α βρίσκεται σε ύψος $H = 84\ cm$ από το οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα καθώς κατέρχεται κυλιόμενη διέρχεται από τα σημεία Β και Γ που απέχουν από το σημείο Α κατακόρυφη απόσταση h_1 και h_2 αντίστοιχα, με $h_2 = 4h_1$. Μόλις η σφαίρα φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, μπαίνει σε κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 28\ cm$. Η σφαίρα κυλιόμενη εντός της κυκλικής στεφάνης εκτελεί ανακύκλωση.



α) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας, α_{cm}, της σφαίρας κατά την κίνησή της στο πλάγιο επίπεδο.

β) Να βρείτε το λόγο των μέτρων $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των στροφορμών της σφαίρας στις θέσεις Β και Γ.

γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας v_{cm} στο ανώτερο σημείο της στεφάνης (σημείο Δ στο σχήμα).

δ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης N που δέχεται η σφαίρα από τη στεφάνη στο σημείο Δ.

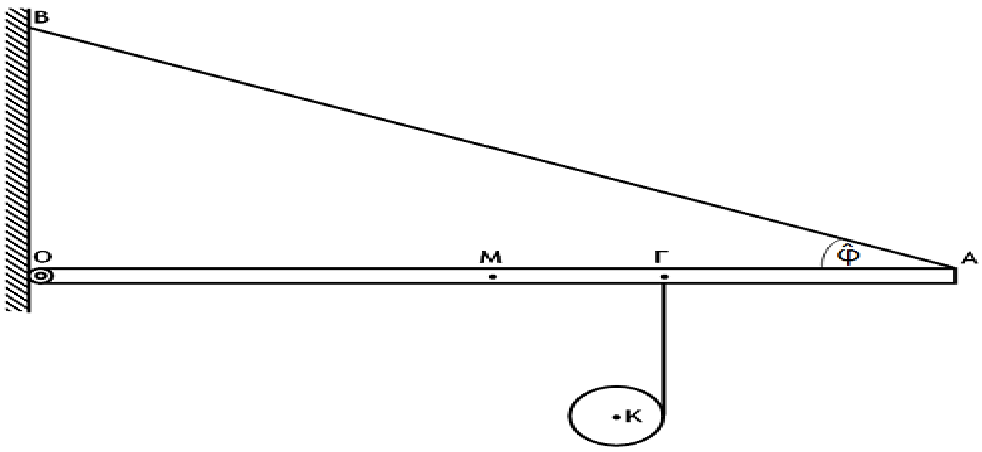
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$, $\eta\mu\hat{\varphi} = 0,7$. Η ακτίνα της σφαίρας r είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R της στεφάνης, $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6**

Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μάζα $M = 4\ kg$ και μήκος $L = 2\ m$. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια άρθρωσης στο άκρο Ο και νήματος που είναι δεμένο στο άκρο Α και σχηματίζει γωνία 30^o με τη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από ένα σημείο Γ της ράβδου έχει δεθεί μέσω αβαρούς σχοινιού ένα γιο-γιο μάζας $m = 12\ kg$, ο κύλινδρος του οποίου έχει ακτίνα $R = 0,1\ m$. Το γιο-γιο ελευθερώνεται και κατέρχεται διαγράφοντας κατακόρυφη τροχιά, χωρίς ποτέ το σχοινί να γλιστρά. Καθώς το γιο-γιο κατέρχεται το νήμα ΑΒ ασκεί στη ράβδο δύναμη μέτρου $T = 100\ N$. Να βρείτε:

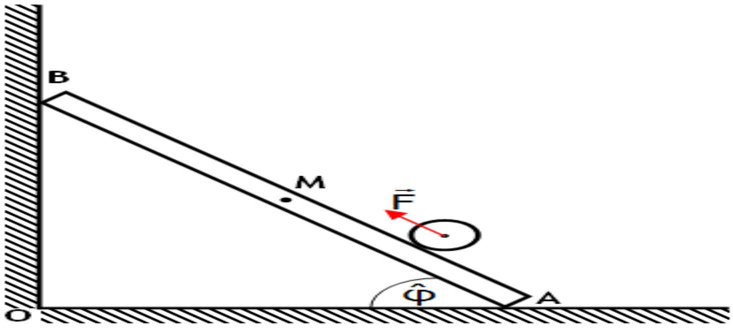
α) το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του κέντρου μάζας Κ του γιο-γιο.
β) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του, που περνά από το κέντρο του Κ.
γ) την απόσταση (ΟΓ).

δ) τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο (μέτρο και διεύθυνση ως προς τον οριζόντιο άξονα).
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.



- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7**

Η λεπτή ομογενής δοκός ΑΒ του σχήματος μήκους $L = 7,5\sqrt{2}\ m$ και μάζας $M = 20\ kg$ ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο ΟΒ και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\hat{\varphi} = 45^0$ με το οριζόντιο δάπεδο. Ένας ομογενής, λεπτός δίσκος μάζας $m = 1\ kg$ και ακτίνας R κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) κατά μήκος της δοκού προς το άκρο Β, υπό την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 20\sqrt{2}\ N$, παράλληλης στη δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να βρείτε:

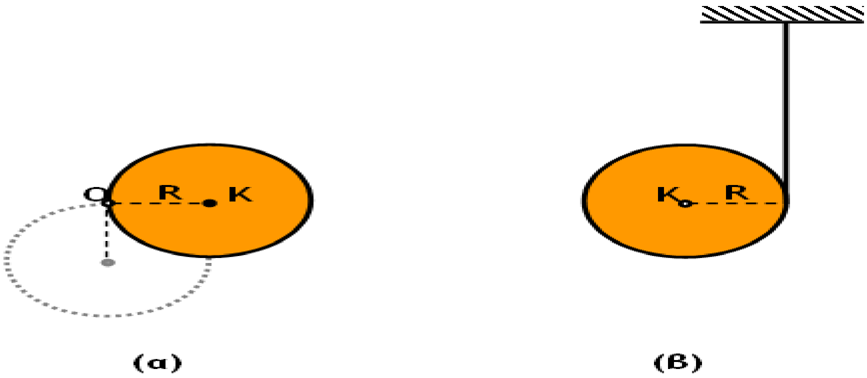
α) το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του κέντρου μάζας του δίσκου.

β) το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας υ_{cm} του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο ανώτερο σημείο Β της δοκού, αν ο δίσκος ξεκίνησε να κινείται από τη βάση Α χωρίς ταχύτητα.

γ) Το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{A}$ που ασκεί ο δίσκος στη ράβδο.
δ) Τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και δαπέδου ώστε ο δίσκος να φτάσει στο άκρο Β της δοκού, χωρίς η δοκός να ολισθήσει στο δάπεδο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8**
- Ο λεπτός ομογενής δίσκος του σχήματος (α) έχει μάζα $M = 9kg$, ακτίνα $R = \frac{1}{30}m$ και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο της περιφέρειάς του.



Αρχικά ο δίσκος βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα ΟΚ που συνδέει το σημείο Ο με το κέντρο μάζας Κ του δίσκου (που συμπίπτει με το κέντρο του δίσκου), να είναι οριζόντια. Από αυτή τη θέση αφήνουμε το δίσκο να στραφεί. Η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία ο δίσκος ξεκινά τη στροφική του κίνηση έχει μέτρο $a_\gamma = 200\ \frac{rad}{s^2}$.

Να βρείτε:

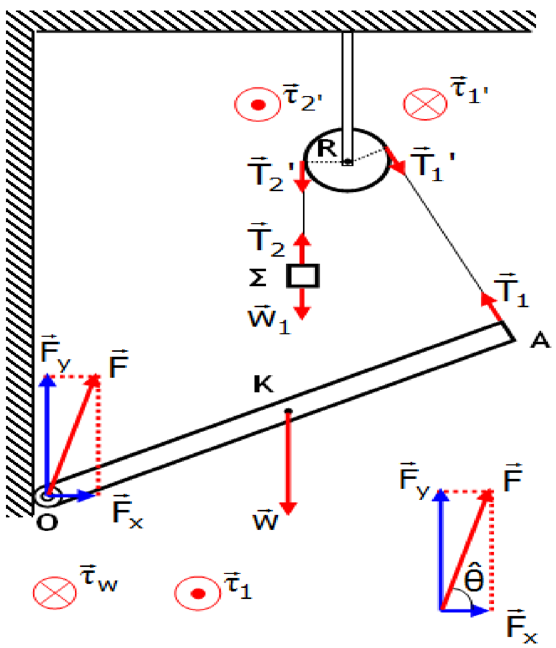
α) Τη ροπή αδράνειας $I_{(O)}$ του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του που διέρχεται από το σημείο Ο.
β) Τυλίγουμε πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα γύρω από έναν ίδιο δίσκο και την ελεύθερη άκρη του νήματος τη στερεώνουμε στην οροφή, σχηματίζοντας ένα γιο-γιο, όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο και αυτός ξεκινά να κατέρχεται με το νήμα διαρκώς κατακόρυφο και χωρίς αυτό να γλιστρά ως προς το δίσκο.

γ) Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.
δ) Να δείξετε ότι η τάση του νήματος που ασκείται στο δίσκο δε μεταβάλλει την συνολική κινητική του ενέργεια.
ε) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.
στ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. Επίσης δεν θεωρείται γνωστός ο τύπος της ροπής αδράνειας ομογενή δίσκου για άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

<u>Λύση 1</u>

α) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στο σώμα, καθώς και οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στην τροχαλία (ως προς τον άξονά της):



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_1=\vec{0}\Rightarrow T_2=w_1\Rightarrow T_2=m_1g\Rightarrow T_2=\sqrt{5}\ N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, έχουμε:

$$\vec{T}_2'=-\vec{T}_2\Rightarrow T_2'=T_2\Rightarrow T_2'=\sqrt{5}\ N$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει (ως προς τον άξονά της):

$$\Sigma\vec{\tau}=\vec{0}\Rightarrow T_2'\cdot R=T_1'\cdot R\Rightarrow T_2'=T_1'\Rightarrow T_1'=\sqrt{5}\ N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, έχουμε:

$$\vec{T}_1'=-\vec{T}_1\Rightarrow T_1'=T_1\Rightarrow\ \ T_1=\sqrt{5}\ N$$

β) Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει (ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O):

$$\Sigma\vec{\tau}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\tau}_w+\vec{\tau}_1=0\Rightarrow\tau_w=\tau_1\Rightarrow\tau_w=T_1\cdot L$$

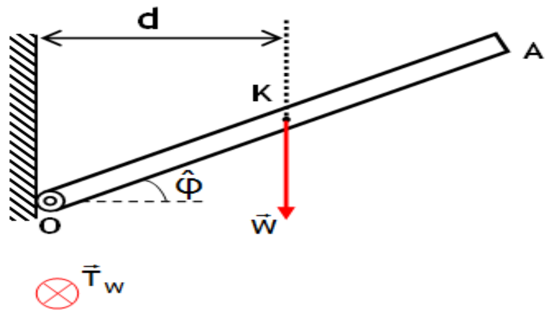
Το μέτρο της ροπής τ_w του βάρους της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O δίνεται από τον τύπο:

$\tau_w=w\cdot d$, όπου d είναι ο μοχλοβραχίονας του βάρους $\vec{w}$. Ισχύει ότι:

$$d=(OK)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow d=\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu45^0\Rightarrow d=\frac{L\sqrt{2}}{4}$$

Επομένως:

$$\tau_w=w\cdot d\Rightarrow\tau_w=Mg\cdot d\Rightarrow\tau_w=M\cdot10\cdot\frac{L\sqrt{2}}{4}(SI)\Rightarrow\tau_w=M\cdot\frac{5L\sqrt{2}}{2}(SI)$$



Με αντικατάσταση στη σχέση $\tau_w=T_1\cdot L$ έχουμε:

$$\tau_w=T_1\cdot L\Rightarrow M\cdot\frac{5L\sqrt{2}}{2}=\sqrt{5}\cdot L\Rightarrow M=\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}kg\Rightarrow$$

$$M=\frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}kg\Rightarrow\quad M=0,2\sqrt{10}\ kg$$

γ) Η ροπή αδράνειάς της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O και ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας σχετίζονται με το θεώρημα Steiner.

$$I_{(O)}=I_{cm}+M\left(\frac{L}{2}\right)^2\Rightarrow I_{(O)}=\frac{1}{12}ML^2+\frac{1}{4}ML^2\Rightarrow I_{(O)}=\frac{1}{3}ML^2\Rightarrow$$

$$L=\sqrt{\frac{3\cdot I_{(O)}}{M}}=\sqrt{\frac{3\cdot 15\cdot\sqrt{10}\cdot 10^{-4}kgm^2}{0,2\cdot\sqrt{10}kg}}\Rightarrow L=0,15m$$

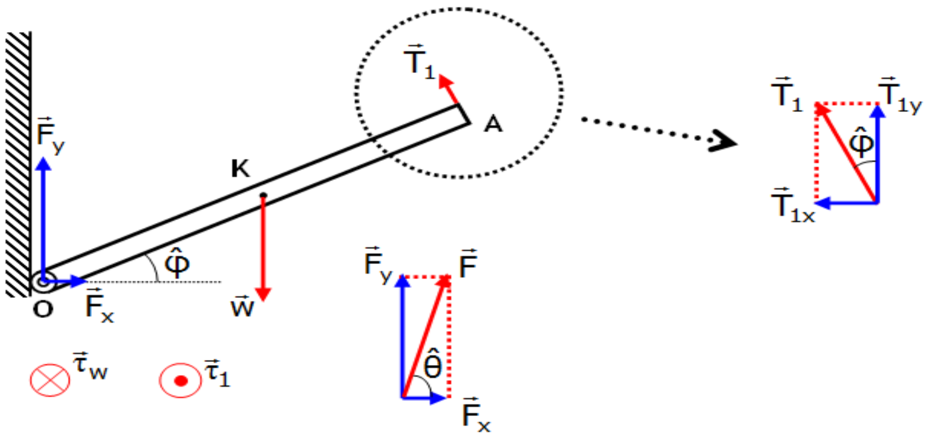
δ) Αναλύουμε την $\vec{T}_1$ σε δύο συνιστώσες: μία κατακόρυφη και μία οριζόντια, όπως έχει αναλυθεί και η $\vec{F}$. Επειδή η $\vec{T}_1$ είναι κάθετη στη ράβδο και η $\vec{T}_{1y}$ είναι κατακόρυφη, η γωνία που σχηματίζουν θα είναι ίση με τη γωνία $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x=\vec{0}\Rightarrow F_x=T_{1x}\Rightarrow F_x=T_1\eta\mu\varphi\Rightarrow F_x=\frac{\sqrt{10}}{2}\ N$$

$$\Sigma\vec{F}_y=\vec{0}\Rightarrow F_y+T_{1y}=w\Rightarrow F_y=Mg-T_1\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow$$

$$F_y=2\sqrt{10}N-\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}N\Rightarrow F_y=\frac{3}{2}\sqrt{10}\ N$$



Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$F^2=F_x{}^2+F_y{}^2\Rightarrow F^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}N\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}N\right)^2\Rightarrow$$

$$F^2=\left(\frac{10}{4}+\frac{90}{4}\right)N^2\Rightarrow F^2=25N^2\Rightarrow\quad F=5\ N$$

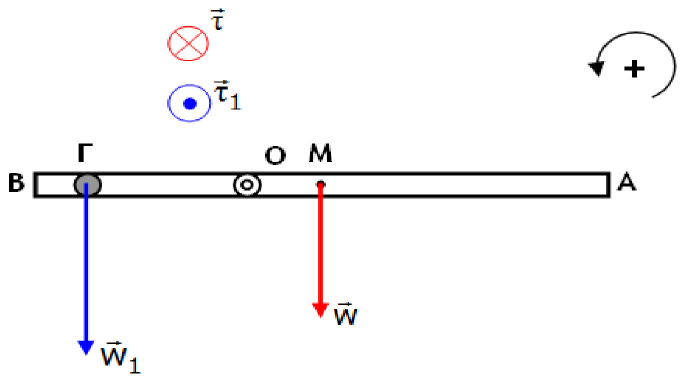
<u>Λύση 2</u>

α) Οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στο σύστημα ράβδος – σφαιρίδιο είναι οι εξής:

το βάρος $\vec{w}$ της ράβδου, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}$.

το βάρος $\vec{w}_1$ του σφαιριδίου, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}_1$.

Οι κατευθύνσεις των ροπών φαίνονται στο σχήμα:



Για τη στροφική ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(O)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{t}_w + \vec{t}_{w_1} = 0 \quad (1)$$

Τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων είναι:

$$\tau = w \cdot (OM) \Rightarrow \tau = Mg \cdot (OM) \Rightarrow \tau = 50N \cdot 10^{-1}m \Rightarrow \tau = 5\ Nm$$

$$\tau_1 = w_1 \cdot (\Gamma O) \Rightarrow \tau_1 = m_1 g \cdot (\Gamma O) \Rightarrow \tau_1 = m_1 \cdot 10m/s^2 \cdot 3 \cdot 10^{-1}m \Rightarrow$$
$$\tau_1 = m_1 \cdot 3\ (SI)$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_1 = \tau \Rightarrow m_1 \cdot 0,3 = 0,5 \Rightarrow \quad m_1 = \frac{5}{3}\ kg$$

β1) Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του ισχύει:

$$I_{\Sigma\Upsilon\Sigma T(O)} = I_{P\alpha\beta\delta(O)} + m_1(\mathrm{O\Gamma})^2 + m_2(\mathrm{O}M)^2 \quad (2)$$

Επειδή ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος σε οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Steiner για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της Ο:

$$I_{P\alpha\beta\delta(O)} = I_{cm} + M \cdot (OM)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12}ML^2 + M \cdot (OM)^2 \Rightarrow$$

$$I_{P\alpha\beta\delta(O)} = \left[\frac{1}{12} \cdot 5kg \cdot (0,6\sqrt{3}m)^2 + 5kg \cdot (0,1m)^2\right] \Rightarrow$$

$$I_{P\alpha\beta\delta(O)} = 0,5\ kgm^2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$I_{\Sigma\Upsilon\Sigma T(O)} = I_{P\alpha\beta\delta(O)} + m_1(\mathrm{O\Gamma})^2 + m_2(\mathrm{O}M)^2 =$$

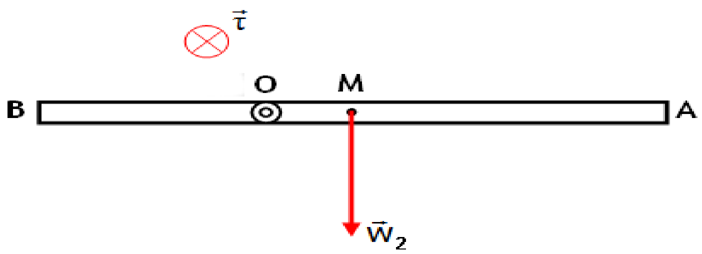
$$= 0,5kgm^2 + \frac{5}{3}kg \cdot (0,3m)^2 + \frac{65}{99}kg \cdot (0,1m)^2 \Rightarrow$$

$$I_{\Sigma\Upsilon\Sigma T(O)} = \frac{65}{99}kgm^2$$

β2) Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της ράβδου στην οριζόντια θέση, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης. Οι ροπές του βάρους $\vec{w}$ της ράβδου και του βάρος $\vec{w}_1$ του σφαιριδίου αλληλοαναιρούνται, οπότε η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος θα οφείλεται μόνο στη ροπή του βάρους $\vec{w}_2$.

$$a_\gamma = \frac{\Sigma\tau_{(O)}}{I_{(O)}} = \frac{m_2 g(OM)}{I_{(O)}} \Rightarrow a_\gamma = \frac{\frac{65}{99}kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,1m}{\frac{65}{99}kgm^2} \Rightarrow a_\gamma = 1\frac{rad}{s^2}$$

Η κατεύθυνση της επιτάχυνσης είναι ομόρροπη με την κατεύθυνση της συνολικής ροπής, η οποία φαίνεται στο σχήμα:



β3) Η στροφορμή του συστήματος θα βρεθεί από τη σχέση $L = I\omega$ (3)
Για την εύρεση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας ω στην κατακόρυφη θέση θα χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας παίρνοντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από την τελική θέση του κέντρου μάζας της ράβδου.

$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2 + M)g(OM) + 0 = m_1 g[(OM) + (O\Gamma)] + \frac{1}{2}I_{\Sigma\Upsilon\Sigma T(\mathrm{O})}\omega^2 \Rightarrow$$

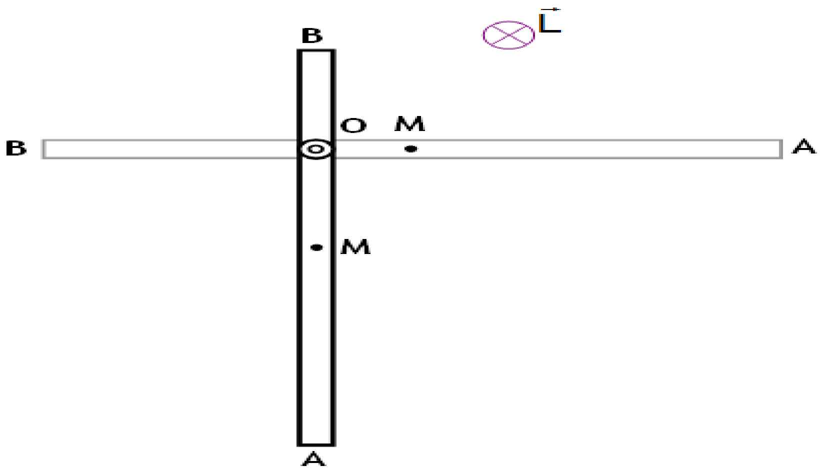
$$m_2 g(OM) = \frac{1}{2}I_{\Sigma\Upsilon\Sigma T(\mathrm{O})}\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2m_2 g \cdot (OM)}{I_{\Sigma\Upsilon\Sigma T(O)}} = \frac{2\frac{65}{99}kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,1m}{\frac{65}{99}kgm^2} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{2}\frac{rad}{s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{65}{99}kgm^2 \cdot \sqrt{2}\frac{rad}{s} \Rightarrow L = \frac{65\sqrt{2}}{99}kgm^2/s$$

Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι ομόρροπη με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας και φαίνεται στο σχήμα:



Λύση 3

α) Η τριβή ολίσθησης που ασκεί η ράβδος ΑΟΒ στον τροχό, όσο αυτός περιστρέφεται, δίνεται από τον τύπο $T_{ολ} = \mu N$, όπου N η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί η ράβδος ΑΟΒ στον τροχό. Με επίλυση ως προς Ν και αντικατάσταση έχουμε

$$N = \frac{T_{ολ}}{\mu} = \frac{10N}{0,1} \Rightarrow N = 100 \ N$$

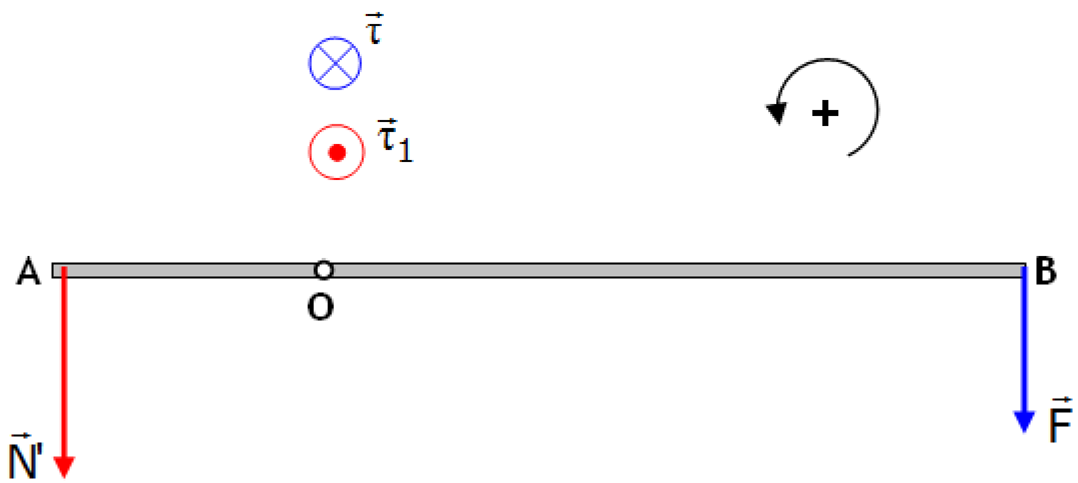
Από τον 3^{o} Νόμο Newton, η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί η ράβδος ΑΟΒ στον τροχό έχει ίσο μέτρο με την κάθετη δύναμη επαφής N' που ασκεί ο τροχός στη ράβδο ΑΟΒ (βλ. το παρακάτω σχήμα). Επομένως: $N' = 100 \ N$

Οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στη ράβδο ΑΟΒ είναι οι εξής:

η κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}$

η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}'$ που ασκεί ο τροχός στη ράβδο ΑΟΒ, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}_1$.

Οι κατευθύνσεις των ροπών φαίνονται στο σχήμα:



Για να ισορροπεί η ράβδος ΑΟΒ σε οριζόντια θέση, πρέπει να ισχύει:

$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$ (ως προς το σημείο Ο) (1)

Θέτουμε $(AO) = x$.

Τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων είναι:

$$\tau = F \cdot (OB) \Rightarrow \tau = 400 \cdot (0,4 - x)\ (SI) \Rightarrow \tau = 160 - 400x\ (SI)$$

$$\tau_1 = N' \cdot x \Rightarrow \tau_1 = 100x\ (SI)$$

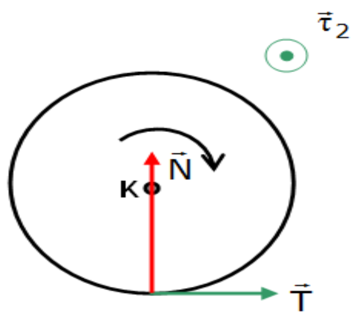
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_1 = \tau \Rightarrow 160 - 400x = 100x \Rightarrow 500x = 160 \Rightarrow$$
$$(AO) = 0,32\ m$$

β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τροχού κατά τη διάρκεια της στροφικής του κίνησης ισούται με το μέτρο της συνολικής ροπής που ασκείται στον τροχό:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \quad (2)$$

Η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στον τροχό είναι η τριβή ολίσθησης, η οποία είναι σταθερή. Η κατεύθυνση της ροπής φαίνεται στο σχήμα.



Το μέτρο της ροπής της τριβής ολίσθησης είναι:

$$\tau_2 = T_{o\lambda} \cdot R = 10N \cdot 0,1m \Rightarrow \tau_2 = 1\ Nm$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_2 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 1\ \frac{kgm^2}{s^2}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \quad (3)$$

Το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας ω_0 βρίσκεται από τον τύπο:

$L_0 = I \cdot \omega_0$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\omega_0 = \frac{L_0}{I} = \frac{20kgm^2/s}{2kgm^2} \Rightarrow \omega_0 = 10\ \frac{rad}{s}$$

Επομένως, όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι το μισό από το αρχικό θα είναι: $\omega = 5\ \frac{rad}{s}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = 1Nm \cdot 5\frac{rad}{s} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5\frac{J}{s}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο τροχός ακινητοποιείται θα ισχύει $L_1 = 0$.

Επειδή $\frac{dL}{dt} = 1\ \frac{kgm^2}{s^2} = \sigma\tau\alpha\theta$ έχουμε (SI):

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = 1 \Rightarrow \left|\frac{0 - L_0}{t_1 - 0}\right| = 1 \Rightarrow \frac{20}{t_1} = 1 \Rightarrow \quad t_1 = 20\ s$$

Η μέση ισχύς $|P_\mu|$ της ροπής που ακινητοποίησε τον τροχό (σε απόλυτη τιμή) δίνεται από τον τύπο: $|P_\mu| = \left|\frac{W}{t_1}\right|$, όπου W το έργο της ροπής που ακινητοποίησε τον τροχό.

Από το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας, για τη στροφική κίνηση αν θέσουμε ως αρχική τη στιγμή $t_0 = 0$ και ως τελική τη στιγμή $t_1 = 20\ s$, έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}I{\omega_0}^2 = W \Rightarrow W = -\frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow W = -100\ J$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $|P_\mu| = \left|\frac{W}{t_1}\right|$ έχουμε:

$$|P_\mu| = \frac{W}{t_1} \Rightarrow |P_\mu| = \frac{100J}{20s} \Rightarrow \quad |P_\mu| = 5\ W$$

<u>Λύση 4</u>

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα και στην τροχαλία:

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_1:

η δύναμη $\vec{w}$ είναι το βάρος του σώματος,

η δύναμη $\vec{T}_1$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα.

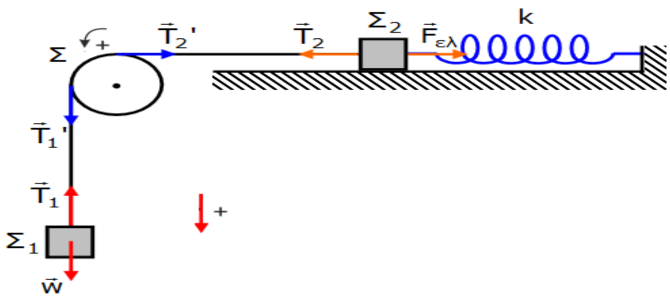
Επίσης φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_2:

η δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ ασκείται από το ελατήριο,

η δύναμη $\vec{T}_2$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.

Στην τροχαλία Σ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούν ροπή:

η δύναμη $\vec{T}_1'$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα, η δύναμη $\vec{T}_2'$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.



Για την ισορροπία του Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_1 = \vec{0} \Rightarrow T_1 = w \Rightarrow T_1 = mg \Rightarrow T_1 = 10\ N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_1{}' = T_1 = 10\ N$$

Για την ισορροπία της τροχαλίας Σ έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow T_2{}'R = T_1{}'R \Rightarrow T_2{}' = T_1{}' = 10\ N$$

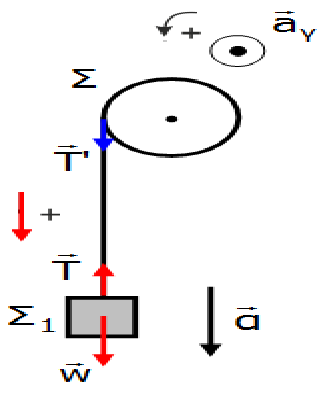
Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_2{}' = T_2 = 10\ N$$

Για την ισορροπία του Σ_2 έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = T_2 \Rightarrow \ F_{\varepsilon\lambda} = 10\ N$$

β1) Μόλις κόψουμε το νήμα, η τροχαλία θα ξεκινήσει να περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma$ και το Σ_1 να κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_1 και η δύναμη που ασκεί ροπή στην τροχαλία.



Για τη μεταφορική κίνηση του Σ_1 ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma F_1 = m\alpha \Rightarrow w - T = m\alpha \Rightarrow T = mg - m\alpha \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας Σ ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$$\Sigma\tau = Ia_\gamma \Rightarrow T'R = Ia_\gamma \Rightarrow TR = Ia_\gamma$$

και με αντικατάσταση της Τ από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$(mg - m\alpha)R = Ia_\gamma \Rightarrow mgR - mR\alpha = Ia_\gamma \quad (2)$$

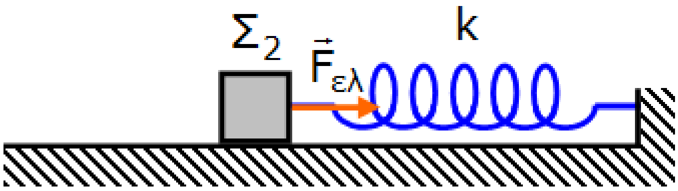
Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, η επιτρόχια επιτάχυνση $a_\gamma R$ των σημείων της περιφέρειάς της είναι ίση κατά μέτρο με την επιτάχυνση α του Σ_1: $\alpha = a_\gamma R$.

Με αντικατάσταση στην (2) έχουμε:

$$mgR - mR\alpha = Ia_\gamma \Rightarrow mgR - mR^2 a_\gamma = Ia_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{mgR}{I + mR^2} \Rightarrow$$

$$a_\gamma = \frac{1kg \cdot 10m/s^2 \cdot 0,1m}{0,01kgm^2 + 1kg(0,1m)^2} \Rightarrow a_\gamma = 50\ \frac{rad}{s^2}$$

β2) Μόλις κόψουμε το νήμα, το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100N/m}{1kg}} \Rightarrow \omega = 10\ \frac{rad}{s}$.



Ψάχνουμε πόσο θα έχει κατέβει το σώμα Σ_1 όταν η τροχαλία περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\ \frac{rad}{s}$. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, το σώμα Σ_1 θα έχει κατέβει κατά h που είναι ίσο με το μήκος Δs του σχοινιού που ξετυλίχτηκε, $h = \Delta s = R\theta$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας για την περιστροφή της τροχαλίας. Θεωρούμε ως αρχική θέση τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και ως τελική τη θέση για την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται $\omega = 10\ \frac{rad}{s}$. Το μοναδικό έργο είναι αυτό της τάσης του νήματος. Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{T'} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = T' \cdot R \cdot \theta \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = T' \cdot h (3)$$

Το T' βρίσκεται με αντικατάσταση της τιμής $a_\gamma = 50\ \frac{rad}{s^2}$ στη σχέση $TR = Ia_\gamma$, έχουμε:

$$T \cdot 0,1m = 0,01kgm^2 \cdot 50\frac{rad}{s^2} \Rightarrow T = T' = 5\ N$$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \cdot 0,01kgm^2 \cdot (10\frac{rad}{s})^2 = 5N \cdot h \Rightarrow h = 0,1\ m$$

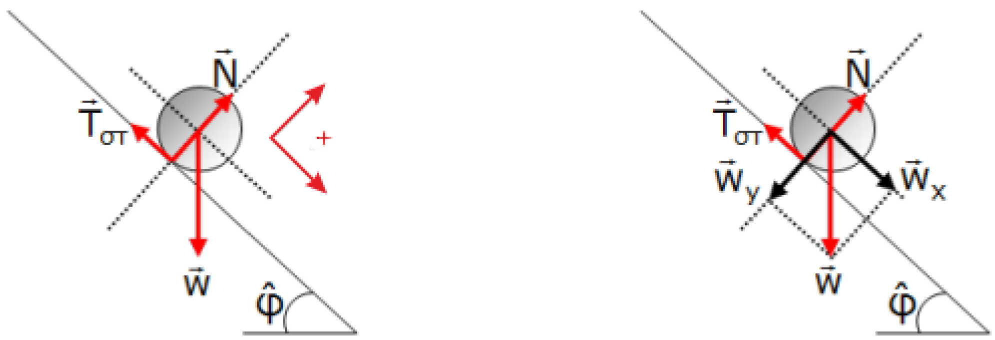
β3) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τον τύπο: $\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega$. Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = T' \cdot R \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5N \cdot 0,1m \cdot 10\frac{rad}{s} \Rightarrow$$
$$\frac{dK}{dt} = 5\ \frac{J}{s}$$

Λύση 5

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.

Στο σχήμα (α) φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα καθώς κατέρχεται στο πλάγιο επίπεδο. Στο σχήμα (β) έχει αναλυθεί το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες:



(α) (β)

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow w_x - T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\varphi - m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma\vec{\tau} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau} \cdot r = \frac{2}{5}mr^2a_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}mra_\gamma$$

Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη $\alpha_{cm} = a_\gamma r$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται $T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5} m\alpha_{cm}$ (2)

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) έχουμε:

$$T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\varphi - m\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{2}{5}m\alpha_{cm} + m\alpha_{cm} = mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \frac{7}{5}\alpha_{cm} = g\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{5}{7} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,7 \Rightarrow \ \alpha_{cm} = 5 \ \frac{m}{s^2}$$

β) Για το λόγο $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των δύο στροφορμών ισχύει:

$$\frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{I\omega_B}{I\omega_\Gamma} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{\omega_B}{\omega_\Gamma} \ \ (3)$$

Τα ω_B , ω_Γ θα βρεθούν από τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της θέσης Α και των θέσεων Β, Γ αντίστοιχα. Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη $(\upsilon_{cm} = \omega r)$, η κινητική της ενέργεια μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$K = \frac{1}{2}m{\upsilon_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}(mr^2\omega^2 + \frac{2}{5}mr^2\omega^2) \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}m(r^2\omega^2 + \frac{2}{5}r^2\omega^2) \Rightarrow$$

$K = \frac{7}{10}mr^2\omega^2$ ή $K = \frac{7}{10}m{\upsilon_{cm}}^2$ (4), (5)

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (4) έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Β):

$$U_B + K_B = U_A + K_A \Rightarrow 0 + \frac{7}{10}mr^2\omega_B^2 = mgh_1 \Rightarrow \omega_B^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{r^2}h_1 \Rightarrow$$

$$\omega_B = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_1}$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Γ):

$$U_\Gamma + K_\Gamma = U_A + K_A \Rightarrow 0 + \frac{7}{10}mr^2\omega_\Gamma^2 = mgh_2 \Rightarrow \omega_\Gamma^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{r^2}h_2 \Rightarrow$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{\omega_B}{\omega_\Gamma} = \frac{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_1}}{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_2}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{1}{2}$$

γ) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας, θέτοντας ως αρχική τη θέση Α και ως τελική τη θέση Δ. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $r << R$ και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (5), έχουμε:

$$U_\Delta + K_\Delta = U_A + K_A \Rightarrow mg2R + \frac{7}{10}mv_{cm}^2 = mgH + 0 \Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-2R)} \Rightarrow$$

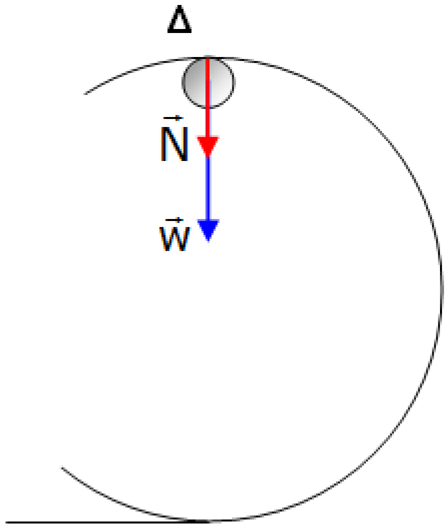
$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot(0,84m - 0,56m)} \Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{100}{7}\cdot 0,28}\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$v_{cm} = 2\ \frac{m}{s}$$

δ) Η σφαίρα φτάνοντας στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής διαδρομής, δέχεται συνισταμένη (κεντρομόλο) δύναμη στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F\ (= F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho})\ = \frac{m{v_{cm}}^2}{R}$$



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στο σημείο Δ είναι το βάρος της $\vec{w}$ και η δύναμη από τη στεφάνη $\vec{N}$. Με αντικατάσταση έχουμε:

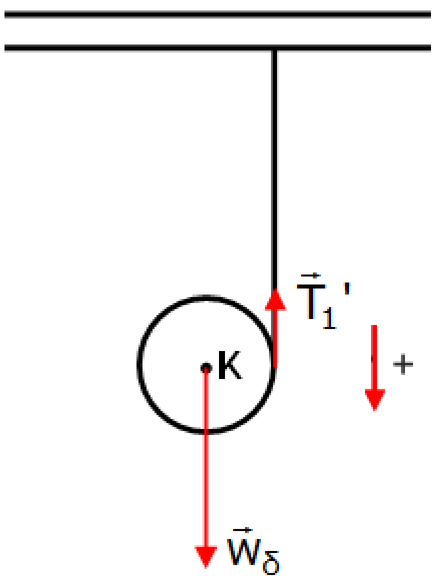
$$mg + N \; = \frac{m{\upsilon_{cm}}^2}{R} \Rightarrow N = \frac{m{\upsilon_{cm}}^2}{R} - mg =$$

$$= \frac{0,7kg \cdot (2m/s)^2}{0,28m} - 0,7kg \cdot 10m/s^2 \Rightarrow$$

$$N = 3N$$

Λύση 6

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο γιο-γιο:



Εφαρμόζουμε τη Θεμελιώδη Εξίσωση της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του γιο-γιο:

$$\Sigma\vec{F}_y = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow w_\delta - T_1{}' = m\alpha_{cm}(1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση του γιο-γιο:

$$\Sigma\tau = I_{cm}a_\gamma \Rightarrow T_1{}' \cdot R = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma \Rightarrow T_1{}' = \frac{1}{2}mRa_\gamma \quad (2)$$

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στο γιο-γιο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρειά του σε χρόνο dt, θα είναι ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει κατέβει το γιο-γιο. Επομένως:

$$dy = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow \alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση $\alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$T_1{}' = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} \ (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) της $T_1{}'$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$w_\delta - \frac{1}{2}m\alpha_{cm} = m\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{3}{2}m\alpha_{cm} = mg \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3}g \Rightarrow$$
$$\alpha_{cm} = \frac{20}{3}\ \frac{m}{s^2}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με τη συνολική ροπή που ασκείται στο γιο-γιο. Επειδή το βάρος ασκείται στον ελεύθερο άξονα περιστροφής, μόνο η τάση του νήματος ασκεί ροπή στο γιο-γιο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \Rightarrow \frac{dL}{dt} = T_1{}' \cdot R(4)$$

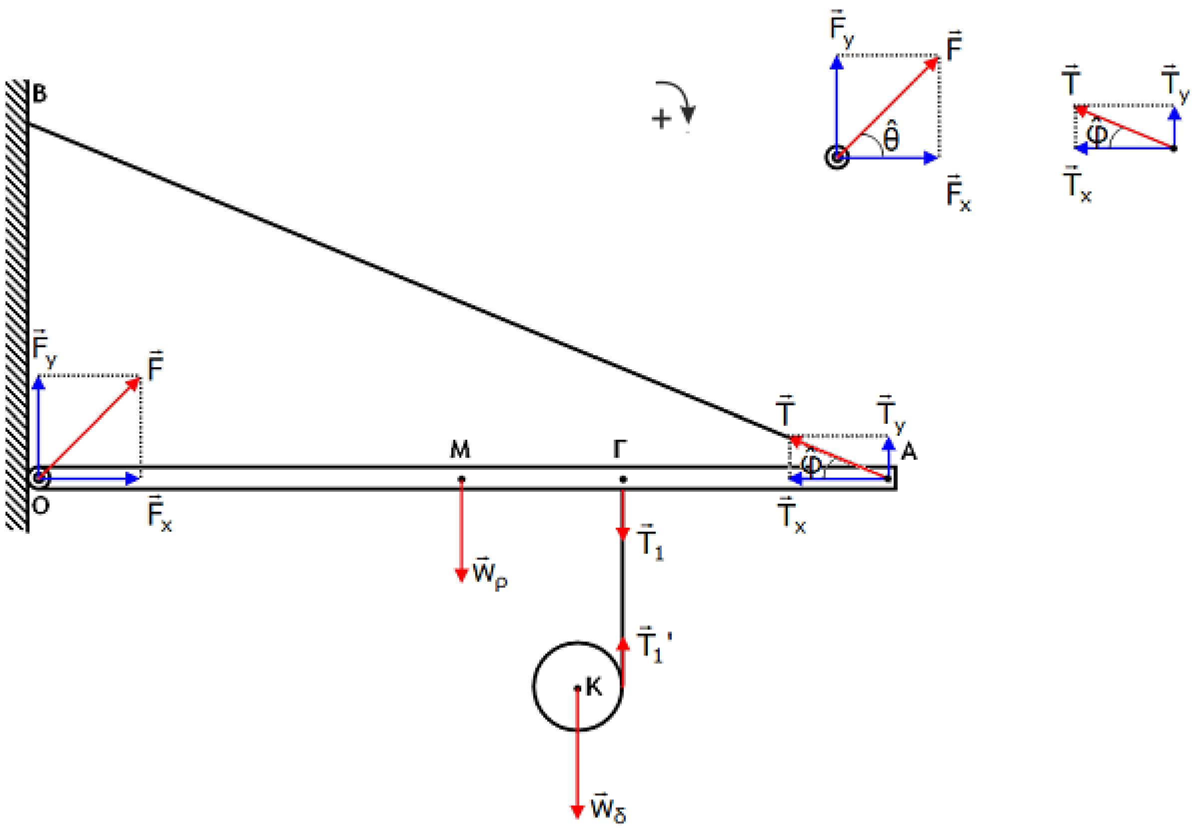
Το μέτρο της T_1' υπολογίζεται από τη σχέση (3) με αντικατάσταση του α_{cm}.

Έχουμε $$T_1{}' = \frac{1}{2}12kg \cdot \frac{20}{3}\frac{m}{s^2} \Rightarrow T_1{}' = 40N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) παίρνουμε

$$\frac{dL}{dt} = 40N \cdot 0,1m \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 4\ \frac{kgm^2}{s^2}$$

γ) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.



Από την ανάλυση της τάσης του νήματος $\vec{T}$ έχουμε:

$$T_x = T \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T_x = 100N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_x = 50\sqrt{3}\ N$$

$$T_y = T \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow T_y = 100N \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow T_y = 50\ N$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ότι: $\Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$. Παίρνοντας ροπές ως προς το σημείο Ο, έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_w + \tau_{T_1} = \tau_{T_y} \Rightarrow w_\rho \cdot \frac{L}{2} + T_1 \cdot (\mathrm{O\Gamma}) = T_y \cdot L(5)$$

Το μέτρο του βάρους της ράβδου είναι: $w_\rho = Mg \Rightarrow w_\rho = 40\ N$

Το μέτρο της T_1 είναι ίδιο με το μέτρο της $T_1^{'}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (5) παίρνουμε:

$$40N \cdot \frac{2}{2}m + 40N \cdot (\mathrm{O\Gamma}) = 50N \cdot 2m \Rightarrow (O\Gamma) = 1,5\ m$$

δ) Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ότι:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = 50\sqrt{3}\ N$$

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + T_y - w_\rho - T_1 = 0 \Rightarrow F_y + 50N - 40N - 40N = 0 \Rightarrow$$

$$F_y = 30\ N$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

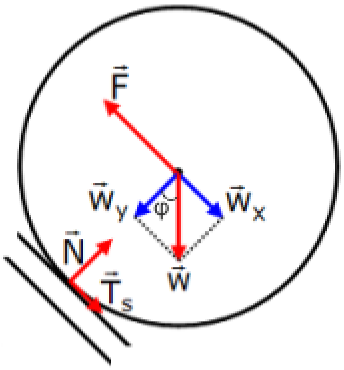
$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} \Rightarrow F = \sqrt{8400}\ N \Rightarrow\ F = 20\sqrt{21}\ N$$

Για τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζουμε την $\varepsilon\varphi\theta$:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow\ \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Λύση 7

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο.



Για τις συνιστώσες w_x και w_y του βάρους του δίσκου έχουμε:

$$w_x = w\eta\mu\varphi \Rightarrow w_x = mg\eta\mu 45^0 \Rightarrow w_x = 5\sqrt{2}\ N$$

$$w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow w_y = mg\sigma\upsilon\nu 45^0 \Rightarrow w_y = 5\sqrt{2}\ N$$

Εφαρμόζουμε τη Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow F - w_x - T_s = m\alpha_{cm}(1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση του δίσκου ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του:

$$\Sigma\tau = I_{cm}a_\gamma \Rightarrow T_s \cdot R = \frac{1}{2}mR^2a_\gamma \Rightarrow T_s = \frac{1}{2}mRa_\gamma(2)$$

Επειδή ο δίσκος εκτελεί κύλιση (χωρίς ολίσθηση) ισχύει: $\alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$

Με αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στη σχέση (2) προκύπτει

$$T_s = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) των F, T_s και w_x υπολογίζουμε το α_{cm}.

$$F - w_x - T_s = m\alpha_{cm} \Rightarrow 20\sqrt{2}N - 5\sqrt{2}N - \frac{1}{2}m\alpha_{cm} = m\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$15\sqrt{2}N = \frac{3}{2}m\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = 10\sqrt{2}\frac{m}{s^2}$$

β) Ο δίσκος ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση, άρα οι εξισώσεις της κινηματικής για τη μεταφορική κίνηση γράφονται:

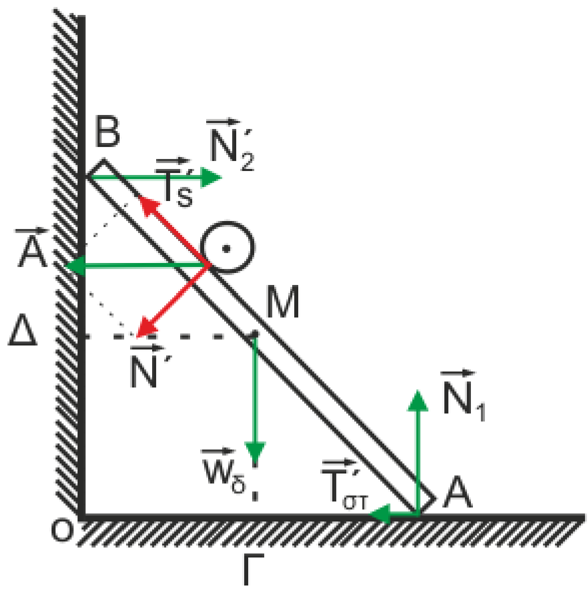
$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t, \;\; L = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$$

Λύνοντας την πρώτη σχέση ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε: $L = \frac{1}{2}\alpha_{cm}\left(\frac{\upsilon_{cm}}{\alpha_{cm}}\right)^2 \Rightarrow L = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2\alpha_{cm}} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{2L\alpha_{cm}}$

Με αντικατάσταση των $L, \; \alpha_{cm}$ βρίσκουμε:

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{2 \cdot 7,5\sqrt{2}m \cdot 10\sqrt{2}\frac{m}{s^2}} \Rightarrow \upsilon_{cm} = 10\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

γ) Ο δίσκος ασκεί στη δοκό τις δυνάμεις $T_s{}'$ και N'. Η $T_s{}'$ έχει ίδιο μέτρο με την T_s (δράση - αντίδραση) και η N' με την Ν (επίσης δράση-αντίδραση).



Από τη σχέση (3) με αντικατάσταση υπολογίζουμε την T_s, έχουμε:

$$T_s = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} = \frac{1}{2}1kg \cdot 10\sqrt{2}\frac{m}{s^2} \Rightarrow T_s = 5\sqrt{2}N$$

Άρα $T_s' = 5\sqrt{2}\ N$ (4)

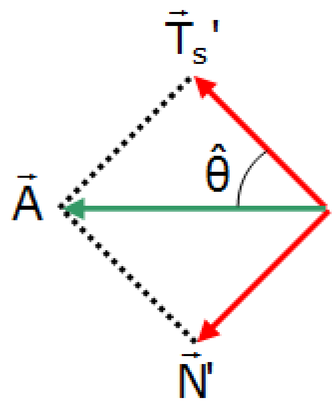
Για τον άξονα τον κάθετο στην κίνηση του δίσκου (άξονας y'y) ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N = w_y \Rightarrow N = 5\sqrt{2}\ N$$

Άρα $N' = 5\sqrt{2}\ N$ (5)

Από τις (4) και (5) και επειδή οι δυνάμεις $\vec{T}_s'$ και $\vec{N}'$ είναι κάθετες, με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$A = \sqrt{N'^2 + T_s'^2} \Rightarrow A = \sqrt{\left(5\sqrt{2}N\right)^2 + \left(5\sqrt{2}N\right)^2} \Rightarrow \ A = 10\ N$$

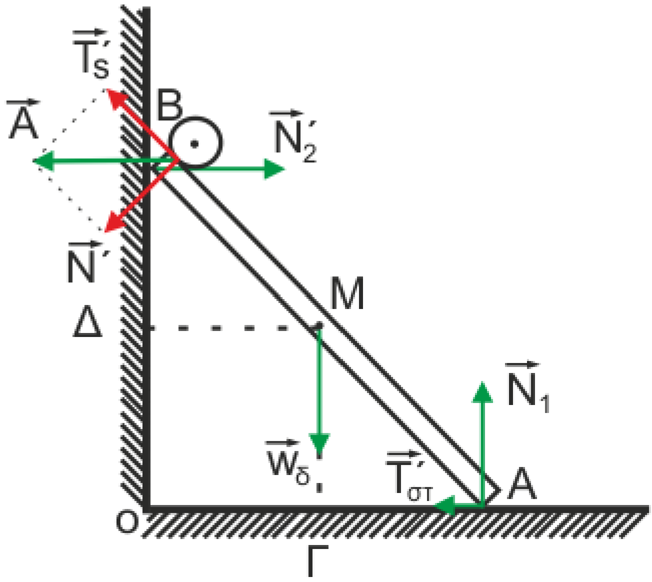


Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{N'}{T_s'} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Rightarrow \ \hat{\theta} = 45^0$$

Άρα η δύναμη $\vec{A}$ είναι οριζόντια δύναμη, παράλληλη προς το δάπεδο.

δ)



Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για τη δοκό:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N_1 = w_\delta \Rightarrow N_1 = Mg \Rightarrow N_1 = 200 \ N$$

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow N_2 = T_{\sigma\tau} + A \Rightarrow N_2 = T_{\sigma\tau} + 10(SI)\,(6)$$

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow N_2 \cdot (OB) = w_\delta \cdot (A\Gamma) + A \cdot (OB) \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot L\eta\mu\varphi = Mg \cdot \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + A \cdot L\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{Mg}{2} + A = \frac{200N}{2} + 10N \Rightarrow N_2 = 110N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (6) βρίσκουμε $T_{\sigma\tau} = 100N$

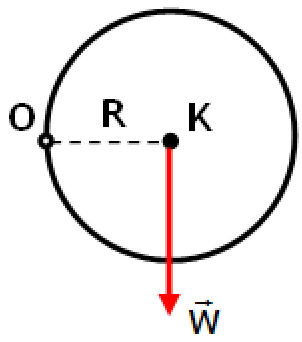
Για να μην ολισθήσει η δοκός πρέπει:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau(\max)} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \leq \mu N_1 \Rightarrow 100N \leq \mu \cdot 200N \Rightarrow \mu \geq 0,5$$

Άρα $\mu_{s,\min} = 0,5$

<u>Λύση 8</u>

α) Στο σχήμα φαίνεται η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στο δίσκο:



Από το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow w \cdot R = I_{(O)} \cdot a_\gamma \Rightarrow I_{(O)} = \frac{MgR}{a_\gamma} \Rightarrow$$

$$I_{(O)} = \frac{9kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{30}m}{200\frac{rad}{s^2}} \Rightarrow I_{(O)} = 1,5 \cdot 10^{-2}\ kgm^2$$

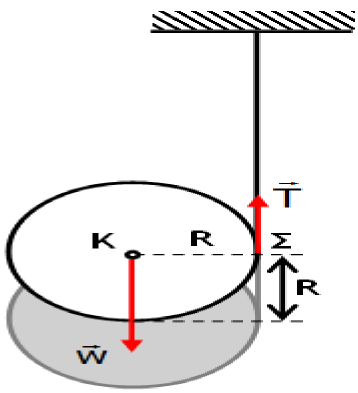
β) Από το Θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_{(O)} = I_{cm} + MR^2 \Rightarrow I_{cm} = I_{(O)} - MR^2 \Rightarrow$$

$$I_{cm} = 1,5 \cdot 10^{-2} kgm^2 - 9kg \cdot \left(\frac{1}{30}m\right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{cm} = 5 \cdot 10^{-3}\ kgm^2$$

γ) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο, $\vec{w}$ και $\vec{T}$.



Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στο δίσκο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρειά του σε χρόνο dt, θα είναι ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και με την απόσταση dy κατά την οποία έχει κατέβει ο δίσκος. Επομένως:

$$dy = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow y_{cm} = \theta \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega \cdot R$$

Για την ταχύτητα του σημείου Σ, στην περιφέρεια της τροχαλίας, στο οποίο ασκείται η τάση $\vec{T}$ του νήματος έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_{(\Sigma)} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\sigma\tau\rho}$$

και επειδή: $\upsilon_{cm} = \omega \cdot R = \upsilon_{\sigma\tau\rho}$ και η μεταφορική ταχύτητα είναι αντίθετη από τη στροφική, θα ισχύει:

$$\vec{\upsilon}_{(\Sigma)} = \vec{0}$$

Άρα, το σημείο Σ είναι στιγμιαία ακίνητο.

Δηλαδή, η τάση $\vec{T}$ του νήματος ασκείται σε στιγμιαία ακίνητο σημείο. Άρα το έργο της W_T είναι μηδέν με συνέπεια να μην επηρεάζει τη συνολική κινητική ενέργεια του δίσκου (σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας – έργου).

δ) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας.

Θέτοντας ως αρχική τη θέση στην οποία αφήνουμε το δίσκο και ως τελική τη θέση στην οποία έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου και με δεδομένο ότι η μόνη δύναμη που προσφέρει έργο είναι το βάρος $\vec{w}$ του δίσκου, έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - 0 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M{\upsilon_{cm}}^2 = MgR \Rightarrow$$

$$I_{cm}\omega^2 + M\omega^2 R^2 = 2MgR \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2MgR}{I_{cm} + MR^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 9kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot}{5 \cdot 10^{-3}\ kgm^2 + 9kg}}$$

$$\omega = 20\ \frac{rad}{s}$$

ε) $$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt}$$

Όμως η μόνη ροπή που προκαλείται στο δίσκο και μεταβάλλει τη στροφική του κινητική ενέργεια είναι από την τάση του νήματος T, καθώς η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με μηδέν. Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \frac{TRd\vartheta}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = TR\omega \quad (1)$$

Στην τελευταία σχέση ο μόνος άγνωστος είναι η τάση του νήματος T η οποία μπορεί να υπολογιστεί από το θεώρημα έργου ενέργειας μόνο για τη στροφική κίνηση του δίσκου μεταξύ των δύο θέσεων.

$$K_{\sigma\tau\rho_{(\tau\varepsilon\lambda)}} - K_{\sigma\tau\rho_{(\alpha\rho\chi)}} = W_{\Sigma_\tau} \Rightarrow K_{\sigma\tau\rho_{(\tau\varepsilon\lambda)}} - 0 = TR\theta$$

Όμως σύμφωνα με την εκφώνηση $R\theta = R$, άρα η τελευταία σχέση γίνεται:

$$K_{\sigma\tau\rho_{(\tau\varepsilon\lambda)}} - 0 = TR \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = TR \Rightarrow T = \frac{I_{cm}\omega^2}{2R} = \frac{5\cdot 10^{-3}\ kgm^2 \cdot (20\frac{rad}{s})^2}{2\cdot\frac{1}{30}m}$$

$$T = 30N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = TR\omega = 30N\cdot\frac{1}{30}m\cdot 20\frac{rad}{s} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = 20\frac{J}{s}$$