Στην άσκηση για μηχανικό κύμα που ακολουθεί, γίνεται αναλυτική επεξεργασία 17 ερωτημάτων

ΑΣΚΗΣΗ

Αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου κατά τη διεύθυνση του θετικού ημιάξονα Ox. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στο αριστερό άκρο O και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$

Η εξίσωση του γραμμικού αρμονικού κύματος είναι

$y = 0.2\eta\mu\pi(5t - 4x)$ (SI) δηλ. y σε m, t σε s και x σε m

Δίνονται: $\pi^2 = 10$, $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\eta\mu 5\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 5\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$, $\sigma\upsilon\nu 0 = +1$ και $\eta\mu\pi = 0$

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΡΩΤΗΜΑΤΩΝ

Πριν ξεκινήσω τα ερωτήματα, από την εκφώνηση αναλύω τα δεδομένα. Αυτό , γιατί σκοπός μου είναι να βρω τα μεγέθη A, T (επομένως f, ω) και λ . Όταν γνωρίζουμε αυτά τα μεγέθη η λύση της άσκησης είναι ευκολότερη.

Στις περισσότερες των περιπτώσεων τα παραπάνω μεγέθη δίνονται εμμέσως

α. Η έκφραση « αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου κατά τη διεύθυνση του θετικού ημιάξονα Ox. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στο αριστερό άκρο O» σε προετοιμάζει για το παρακάτω σχήμα

δηλ. μας δίνει την αρχή του κύματος (το σημείο Ο), το μέσο που διαδίδεται (η έκφραση ομογενές ελαστικό είναι στάνταρ) και τη φορά που διαδίδεται (προς τα δεξιά). Επομένως η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

β. Η έκφραση « αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$» μας δίνει την εξίσωση ταλάντωσης της πηγής $y = A\eta\mu\omega t$ (δεν υπάρχει αρχική φάση)

γ. Τροποποιούμε την εξίσωση για να τη συγκρίνουμε με την εξίσωση του βιβλίου $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ δηλ.

$$y = 0.2\eta\mu\pi(5t - 4x) \Rightarrow y = 0.2\eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{2}t - \frac{4}{2}x\right) \Rightarrow y = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5t - 2x)$$

Από τη σύγκριση των εξισώσεων

$y = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5t - 2x)$ και

$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτουν $A = 0.2m$, $\frac{1}{T} = 2.5 \Rightarrow T = \frac{1}{2.5} \Rightarrow T = 0.4s$, $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 2.5Hz$,

$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 5\pi \frac{rad}{s}$ και $\frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 0.5m$

αντικαθιστώντας τα $A = 0.2m$, $T = 0.4s$ και $\lambda = 0.5m$ στην γενική εξίσωση $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ έχομε την εξίσωση $y = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5t - 2x)$ στο $(S.I)$

Ε Ρ Ω Τ Η Μ Α Τ Α   Α Σ Κ Η Σ Η Σ

ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος ($\upsilon = \lambda f$)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γενική παρατήρηση

Για να υπολογίσω την **ταχύτητα κύματος** πρέπει να γνωρίζω το μήκος κύματος και τη συχνότητα f (ή την περίοδο T ή τη γωνιακή ταχύτητα ω)

Χρησιμοποιώ τις τιμές $f = 2.5Hz$ και $\lambda = 0.5m$ από τα δεδομένα και έχω
$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 0.5m 2.5Hz \Rightarrow \upsilon = 1.25m/s$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα των σημείων ($\upsilon_{\max} = A\omega$) του ελαστικού μέσου

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γενική παρατήρηση: Για να υπολογίσω τη μέγιστη **ταχύτητα σημείων του ελαστικού μέσου** πρέπει να γνωρίζω το πλάτος A (μέγιστη απομάκρυνση) και τη γωνιακή ταχύτητα ω (ή τη συχνότητα f ή την περίοδο T)

Χρησιμοποιώ τις τιμές $A = 0.2m$ και $\omega = 5\pi \frac{rad}{s}$ από τα δεδομένα και έχω

$$\upsilon_{\max} = A\omega \Rightarrow \upsilon_{\max} = 0.2m5\pi \frac{rad}{s} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \pi m/s$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο

ΓΡΑΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου O

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γενική παρατήρηση: Για να γράψω την εξίσωση πρέπει να γνωρίζω αν υπάρχει αρχική φάση ή όχι

Από την εκφώνηση γνωρίζω ότι η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής είναι $y = A\eta\mu\omega t$ (δεν υπάρχει αρχική φάση).

Χρησιμοποιώ τις τιμές $A = 0.2m$ και $\omega = 5\pi \frac{rad}{s}$ από τα δεδομένα και έχω $y_O = A\eta\mu\omega t \Rightarrow y_O = 0.2\eta\mu 5\pi t \ (S.I)$

ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ $y = f(x)$

Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$. Στο διάγραμμα που προκύπτει να σχεδιάσετε τη φορά της ταχύτητας των σημείων $\Lambda(x_\Lambda = 0.2m)$ και $N(x_N = 0.4m)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πριν το σχεδιασμό του στιγμιοτύπου υπολογίζουμε στοιχεία που είναι απαραίτητα

α. Υπολογίζουμε την απόσταση που διαδίδεται το κύμα και τη συγκρίνουμε με το μήκος κύματος. Επίσης συγκρίνουμε τη χρονική στιγμή με την περίοδο.

Επομένως

1.Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = \upsilon t_1 \Rightarrow x = 1.25m/s \times 1s \Rightarrow x = 1.25m$ ή (λόγω $\lambda = 0.5m$) $x = 2\lambda + \frac{\lambda}{2}$

2. Η χρονική στιγμή $t_1 = 1s$ είναι $t_1 = 2T + \frac{T}{2}$ (επειδή $T = 0.4s$)

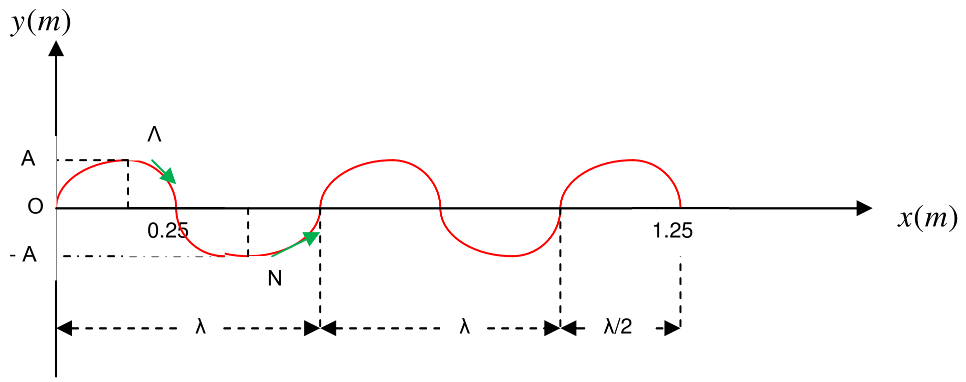
β. Εξετάζουμε τη θέση σημείου O τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή (για $x = 0$)

Η εξίσωση $y_O = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5t - 2x)$ για $x = 0$ και $t_1 = 1s$ γράφεται $y_O = 0.2\eta\mu 5\pi \Rightarrow y_O = 0$

Όταν η απομάκρυνση της πηγής είναι ίση με μηδέν εξετάζουμε το επόμενο σημείο $x = \frac{\lambda}{4}$

Η εξίσωση $y = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5t - 2x)$ για $x = \frac{\lambda}{4}$ και $t_1 = 1s$ γράφεται

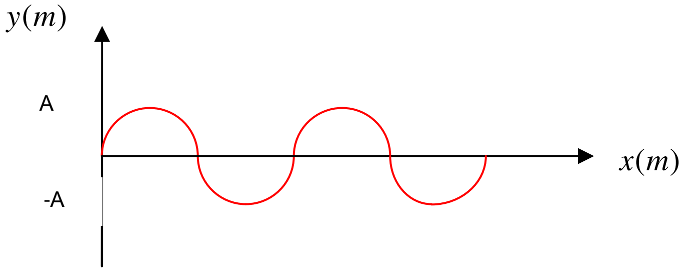
$$y = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5 - 0.25) \Rightarrow y = 0.2\eta\mu 4.5\pi \Rightarrow y = 0.2\eta\mu(4\pi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = +0.2m$$

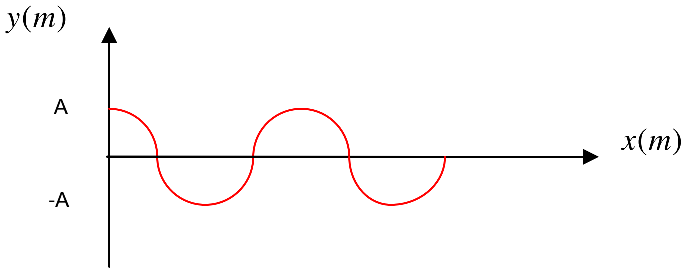


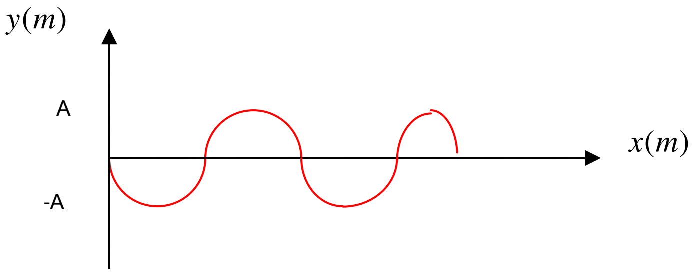
Προσοχή

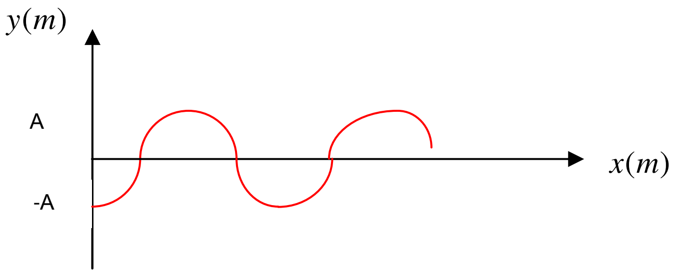
Η γραφική παράσταση των στιγμιοτύπων τελειώνει πάντα στον άξονα Χ. Για το λόγο αυτό μπορεί η γραφική παράσταση να ξεκινήσει ανάποδα, από το τέλος προς την αρχή δηλ. από το σημείο στο οποίο έχει φτάσει το κύμα

Μερικές δυνατές μορφές στιγμιοτύπου









ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το στιγμιότυπο δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης, αμέσως από την απεικόνιση υπολογίζονται το A και λ εμμέσως δε, μέσω των σχέσεων $x = \upsilon t$ και $\upsilon = \lambda f$, τα T , f και ω)

ΕΡΩΤΗΜΑ 5ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΦΑΣΗΣ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων $K(x_K = 1.75m)$ **και** $M(x_M = 2.5m)$ **του ελαστικού μέσου**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από την εξίσωση του κύματος $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ η φάση είναι $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$

Οι φάσεις των σημείων είναι $\phi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_M}{\lambda}\right)$ και $\phi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_K}{\lambda}\right)$ επομένως

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_M}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_K}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{x_M}{\lambda}-2\pi\frac{t}{T}+2\pi\frac{x_K}{\lambda}\ \Delta\phi = -2\pi\frac{x_M}{\lambda}+2\pi\frac{x_K}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \Rightarrow \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{0.5}(2.5-1.75) \Rightarrow \varDelta\varphi = 3\pi rad$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 6ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου M τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας είναι $+0.1m$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1ος τρόπος

Εξίσωση ενέργειας

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \omega^2A^2 = \omega^2x^2 + \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 =$$
$$\omega^2A^2 - \omega^2x^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow \upsilon = \pm\pi\frac{\sqrt{3}}{2}m/s$$

2ος τρόπος

Από την εξίσωση της ταχύτητας αφού πρώτα βρούμε τη φάση του σημείου

από την εξίσωση $y_1 = A\eta\mu\omega t$ προκύπτει $\eta\mu\omega t = \frac{y_1}{A} \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{0.1}{0.2} \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6}rad$ ή $\omega t = 5\frac{\pi}{6}rad$

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι $\upsilon = A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \upsilon = 0.2\times 5\pi\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \upsilon = \pi(\frac{\sqrt{3}}{2})m/s$ ή $\upsilon = 0.2\times 5\pi\sigma\upsilon\nu 5\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\upsilon = \pi(-\frac{\sqrt{3}}{2})m/s$ επομένως μέτρο ταχύτητας $\upsilon = \pi\frac{\sqrt{3}}{2}m/s$

ΕΡΩΤΗΜΑ 7ο

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΦΑΣΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ $\phi = f(x)$

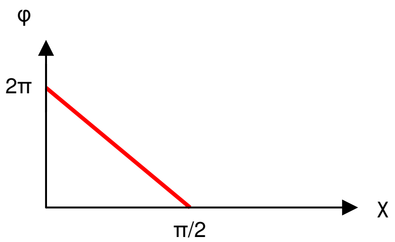
Να παραστήσετε γραφικά τις φάσεις των σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή O, τη χρονική στιγμή $t_2 = 0.4s$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η φάση δίνεται από τη σχέση $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ επομένως

οι φάσεις των σημείων για $t_2 = 0.4s$ είναι

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \phi = 2\pi\left(\frac{0.4}{0.4} - \frac{x}{0.5}\right) \Rightarrow \phi = 2\pi(1 - 2x) \Rightarrow \varphi = 2\pi - 4\pi x$$

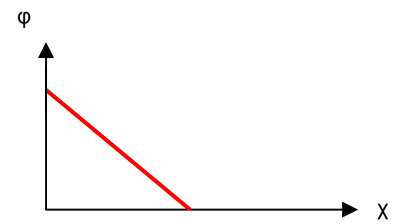


για χ=0 → φ=2π και

για χ=π/2 → φ=0

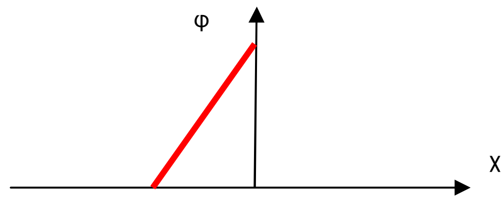
Γενική μορφή απεικόνισης $\phi = f(x)$

από τη σχέση $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$



Γενική μορφή απεικόνισης $\phi = f(x)$

από τη σχέση $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όταν η απεικόνιση δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης, επεξεργαζόμενοι μαθηματικά τη σχέση $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (θέτοντας μια φορά χ=0 → ...... και μια φορά φ=0 → .....) υπολογίζονται το A, λ, T, f και ω

ΕΡΩΤΗΜΑ 8ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΝΑ ΦΤΑΣΕΙ ΤΟ ΚΥΜΑ ΣΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΣΗΜΕΙΟ

Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται ώστε το κύμα να διαδοθεί στο ελαστικό μέσο πέντε μήκη κύματος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή έχομε $x = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{x}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{5\lambda}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{5 \times 0.5}{1.25} \Rightarrow t = 2s$

ή $t = 5T \Rightarrow t = 5 \times 0.4 \Rightarrow t = 2s$

ΕΡΩΤΗΜΑ 9ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται υλικό σημείο μάζας $m = 10^{-4} g$ τη χρονική στιγμή $t_3 = 0.5s$ μετά την έναρξη της ταλάντωσής του

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Συνδέουμε τη χρονική στιγμή με την περίοδο για να βρούμε σε ποια θέση βρίσκεται το σημείο

Με βάση τα παραπάνω, η χρονική στιγμή $t_3 = 0.5s$ είναι $t_3 = T + \frac{T}{4}$ επομένως το σημείο του ελαστικού μέσου που εξετάζουμε βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης $(+A)$

Μέτρο δύναμης

$$F = |-Dy| \Rightarrow F = |-DA| \Rightarrow F = DA \Rightarrow F = m\omega^2 A \Rightarrow F = 10^{-7} Kg \times (5\pi \frac{rad}{s})^2 \times 0.2m \Rightarrow$$

$$F = 10^{-7} Kg \times 25 \times \pi^2 \frac{rad^2}{s^2} \times 0.2m \Rightarrow F = 10^{-7} Kg \times 25 \times 10 \frac{rad^2}{s^2} \times 0.2m \Rightarrow F = 5 10^{-6} N$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 10ο

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΦΑΣΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΟ ΧΡΟΝΟ

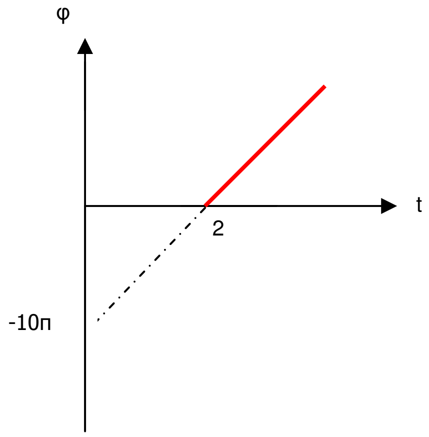
$$\phi = f(t)$$

Να παραστήσετε γραφικά τη φάση ταλάντωσης του σημείου $M(x_M = 2.5m)$ σε συνάρτηση με το χρόνο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η φάση δίνεται από τη σχέση $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ επομένως η φάση του σημείου είναι M είναι $\phi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$

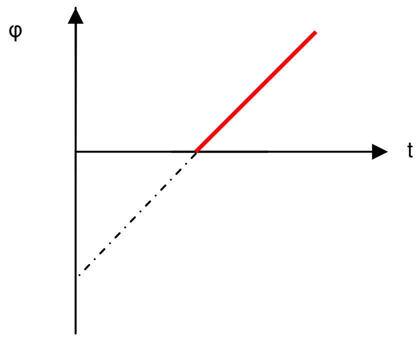
Η φάση για $x_M = 2.5m$ είναι $\phi_M = 2\pi\left(\frac{t}{0.4} - \frac{2.5}{0.5}\right) \Rightarrow \varphi_M = 2\pi(2.5t - 5) \Rightarrow \varphi_M = 5\pi t - 10\pi$



για φ=0 → t=2s

για t=0 → φ=-10π

Γενική μορφή απεικόνισης $\phi = f(t)$



ΕΡΩΤΗΜΑ 11ο

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ $y = f(t)$

Να παραστήσετε γραφικά την απομάκρυνση του σημείου $K(x_K = +1.75m)$ από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

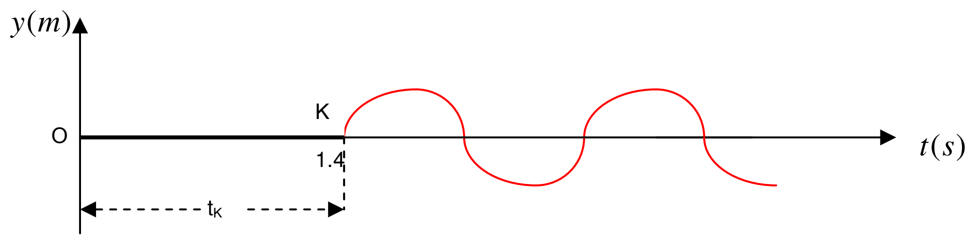
Πρώτα βρίσκουμε το χρόνο που χρειάζεται το κύμα να φτάσει στο σημείο (από την εξίσωση $x = \upsilon t$)

Για να ξεκινήσει το σημείο K να ταλαντώνεται χρειάζεται χρόνο $t_K = \frac{x_K}{\upsilon} \Rightarrow t_K = \frac{1.75}{1.25} \Rightarrow t_K = 1.4\text{s}$ επομένως για χρόνο $t = 1.4\text{s}$ η απομάκρυνση του σημείου K είναι μηδέν. Το σημείο K αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 1.4\text{s}$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης $y_K = f(t)$ είναι $y_K = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1.4s \\ 0.2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0.4} - \frac{1.75}{0.5}\right) & 1.4s \le t \end{cases}$

Για $t = 1.4\text{s}$ η απομάκρυνση του σημείου K είναι $y_K = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \Rightarrow y_K = 0.2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0.4} - \frac{1.75}{0.5}\right) \Rightarrow$ $y_K = 0$

Επίσης $\upsilon_K = \frac{dy_K}{dt} \Rightarrow \upsilon_K = A\omega\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \upsilon_K = A\omega\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow \upsilon_K = A\omega > 0$



Προσοχή

Η γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης των σημείων ξεκινούν από τον άξονα t

ΕΡΩΤΗΜΑ 12ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΣΤΙΓΜΗΣ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΜΕΓΕΘΗ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ – ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΕΧΟΥΝ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΤΙΜΗ

Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του σημείου $K(x_K = +1.75m)$ μηδενίζεται για πρώτη φορά

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από την απεικόνιση της απομάκρυνσης βρίσκουμε ότι το σημείο K τη χρονική στιγμή $t = 1.4\text{s}$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ($y_K = 0$) κινούμενο προς ακραία θέση με θετική φορά ($\upsilon_K > 0$) Ο μηδενισμός της ταχύτητας γίνεται όταν το σημείο K βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης
επομένως χρονική στιγμή βρίσκεται αθροίζοντας το χρόνο που χρειάζεται από το σημείο O μέχρι να φτάσει το σημείο K συν το χρόνο από τη θέση ισορροπίας σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης δηλ

$$t_{o\lambda} = t_{OK} + \frac{T}{4} \Rightarrow t_{o\lambda} = 1.4 + \frac{0.4}{4} \Rightarrow t_{o\lambda} = 1.4 + 0.1 \Rightarrow t_{o\lambda} = 1.5\text{s}$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 13ο

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΗΜΕΙΟΥ $\upsilon = f(t)$

Να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου $K(x_K = +1.75m)$ σε συνάρτηση με το χρόνο

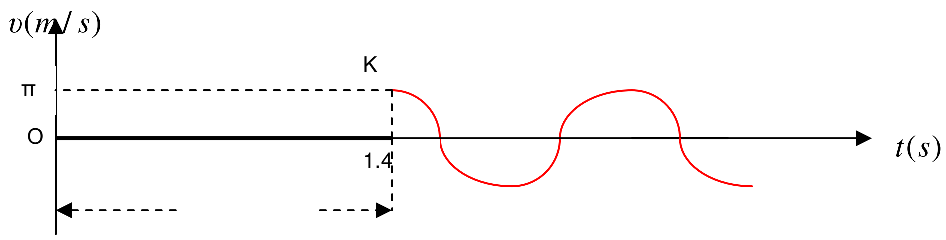
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πρώτα βρίσκουμε το χρόνο που χρειάζεται το κύμα να φτάσει στο σημείο (από την εξίσωση $x = \upsilon t$)

Για να ξεκινήσει το σημείο K να ταλαντώνεται χρειάζεται χρόνο $t = \frac{x_K}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{1.75}{1.25} \Rightarrow t = 1.4\text{s}$

Κατόπιν αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon_K = A\omega\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ τη χρονική στιγμή $t = 1.4\text{s}$ και υπολογίζουμε την ταχύτητα. Επομένως $\upsilon_K = A\omega\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \upsilon_K = 0.2 \times 5\pi\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow \upsilon_K = \pi m/s$

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι $\upsilon_K = f(t)$ είναι $\upsilon_K = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1.4s \\ 0.2 \times 5\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{0.4} - \frac{1.75}{0.5}\right) & 1.4s \le t \end{cases}$



ΕΡΩΤΗΜΑ 14ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ (ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ – ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ) ΣΗΜΕΙΟΥ, ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΙΜΕΣ ΜΕΓΕΘΩΝ ΑΛΛΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Να υπολογίσετε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του άκρου $O\ (x=0)$ τη χρονική στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο $K(x_K=+1.75m)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πρώτα βρίσκουμε το χρόνο που χρειάζεται το κύμα να φτάσει στο σημείο (από την εξίσωση $x=\upsilon t$)

Για να ξεκινήσει το σημείο K να ταλαντώνεται χρειάζεται χρόνο $t=\frac{x_K}{\upsilon}\Rightarrow t=\frac{1.75}{1.25}\Rightarrow t=1.4\text{s}$

Κατόπιν αυτή τη χρονική στιγμή την αντικαθιστούμε στην εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$

Αν πρόκειται για το άκρο $(x=0)$ έχουμε $y_O=A\eta\mu\omega t\Rightarrow y_O=0.2\eta\mu 5\pi\times 1.4\Rightarrow y_O=0.2\eta\mu 7\pi\Rightarrow y_O=0$

ΕΡΩΤΗΜΑ 15ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ Ή ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ Ή ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σημείου $K(x_K = +1.75m)$ τη χρονική στιγμή $t_4 = 2s$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ μέσω της σχέσης $\upsilon = \frac{dy}{dt}$

βρίσκουμε την ταχύτητα $\upsilon = A\omega\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ και μέσω της σχέσης $a = \frac{d\upsilon}{dt}$ βρίσκουμε την επιτάχυνση

$a = -A\omega^2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Με αντικατάσταση των μεγεθών προκύπτει $a_K = -0.2 \times 25\pi^2\eta\mu 2\pi\left(\frac{2}{0.4} - \frac{1.75}{0.5}\right) \Rightarrow a_K = -50\eta\mu 3\pi \Rightarrow a_K = 0$

ΕΡΩΤΗΜΑ 16ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΗΓΗ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗ ΦΑΣΗ ΤΟΥΣ

Να υπολογίσετε την απόσταση από την πηγή δύο σημείων A και B των οποίων οι φάσεις κάποια χρονική στιγμή είναι $\phi_A = \frac{\pi}{2}$ και $\phi_B = \frac{\pi}{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από την εξίσωση του κύματος $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ η φάση είναι $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Οι φάσεις των σημείων είναι $\phi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right)$ και $\phi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$ επομένως με αντικατάσταση προκύπτουν

$\phi_A = 2\pi(2.5t - 2x_A)$ και $\phi_B = 2\pi(2.5t - 2x_B)$

Από τα δεδομένα έχουμε $\phi_A > \phi_B \Rightarrow 2\pi(2.5t - 2x_A) > 2\pi(2.5t - 2x_B) \Rightarrow -x_A > -x_B \Rightarrow x_A < x_B$

άρα πιο μακριά είναι το σημείο B
Για να γνωρίζουμε ακριβώς την απόσταση μας χρειάζεται η χρονική στιγμή

ΕΡΩΤΗΜΑ 17ο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΘΕΣΗΣ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΕ ΣΥΜΦΩΝΙΑ ΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΦΑΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΗΓΗ

Να υπολογίσετε τον αριθμό και τις θέσεις των σημείων του μέσου τα οποία περιέχονται στο τμήμα από τη θέση $x_1 = +1.75m$ μέχρι τη θέση $x_2 = +2.5m$ και είναι σε συμφωνία και αντίθεση φάσης με την πηγή

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η διαφορά φάσης ενός σημείου από την πηγή δίνεται από τη σχέση $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$

Επομένως όταν το σημείο βρίσκεται σε συμφωνία φάσης θα ισχύει $N2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}x \Rightarrow x = N\lambda$

Με αντικατάσταση έχουμε $x = 0.5N$

(Το σύμβολο της ανίσωσης γράφεται μετά από μελέτη των άκρων που γίνεται παρακάτω)

Επομένως $1.75 < x \leq 2.5 \Rightarrow 1.75 < 0.5N \leq 2.5 \Rightarrow 3.5 < N \leq 5$

Οι δυνατές ακέραιες τιμές του N είναι 4 και 5

Επομένως οι θέσεις είναι
$x = 0.5N \Rightarrow x = 4 \times 0.5 = 2m$
$x = 0.5N \Rightarrow x = 5 \times 0.5 = 2.5m$

Όταν το σημείο βρίσκεται σε αντίθεση φάσης θα ισχύει $(2N+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda}x \Rightarrow x = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = N\lambda + \frac{\lambda}{2}$

Με αντικατάσταση έχουμε $x = 0.5N + 0.25$

Επομένως $1.75 \leq x < 2.5 \Rightarrow 1.75 \leq 0.5N + 0.25 < 2.5 \Rightarrow 1.5 \leq 0.5N < 2.25 \Rightarrow 3 \leq N < 4.5 \Rightarrow$

Οι δυνατές ακέραιες τιμές του N είναι 3 και 4
Επομένως οι θέσεις είναι
$x = 0.5N + 0.25 \Rightarrow x = 1.75m$
$x = 0.5N + 0.25 \Rightarrow x = 2.25m$

Σημείωση

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 2s$ η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας των σημείων $x_1 = +1.75m$ και $x_2 = +2.5m$ είναι

$$y_1 = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5\times 2 - 2\times 1.75) \Rightarrow y_1 = 0.2\eta\mu 2\pi(5-3.5) \Rightarrow y_1 = 0.2\eta\mu 3\pi \Rightarrow y_1 = 0$$

Το σημείο (1) δεν βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την πηγή

$$y_2 = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5\times 2 - 2\times 2.5) \Rightarrow y_2 = 0.2\eta\mu 2\pi(5-5) \Rightarrow y_2 = 0.2\eta\mu 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

Το σημείο (2) βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την πηγή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ

Η απόσταση $x_2 = +2.5m$ σε σχέση με το μήκος κύματος είναι $x_2 = 5\lambda$ και έγινε σε χρόνο $t = 5T = 5\times 0.4 = 2s$

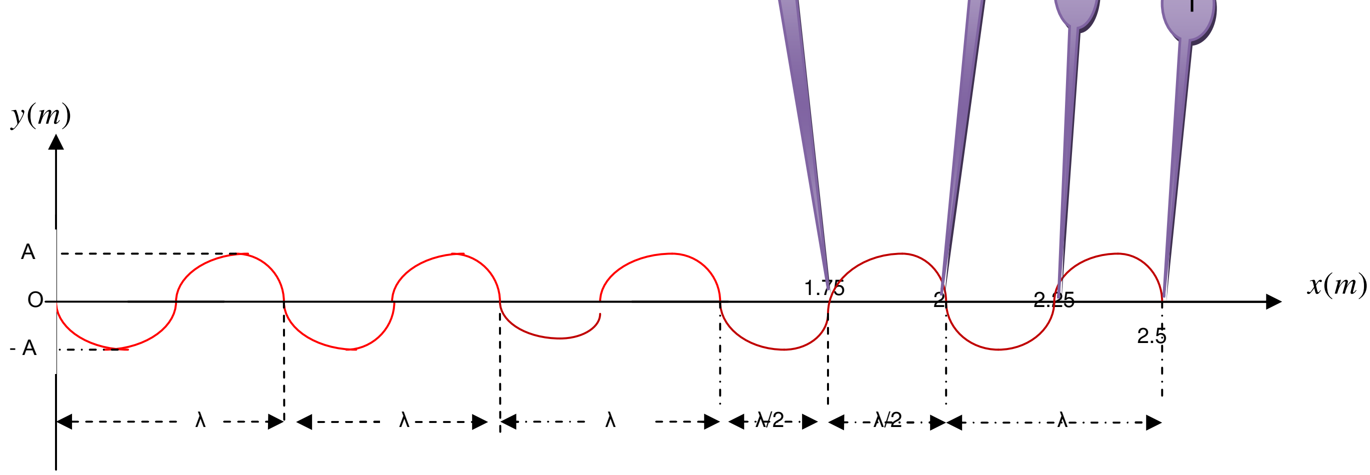
Εξετάζουμε τη θέση σημείου O τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t_2 = 2s$ (για $x = 0$)

Η εξίσωση $y_O = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5t - 2x)$ για $x = 0$ και $t_2 = 2s$ γράφεται $y_O = 0.2\eta\mu 10\pi \Rightarrow y_O = 0$

Όταν η απομάκρυνση της πηγής είναι ίση με μηδέν εξετάζουμε το επόμενο σημείο $x = \frac{\lambda}{4}$

Η εξίσωση $y = 0.2\eta\mu 2\pi(2.5t - 2x)$ για $x = \frac{\lambda}{4}$ και $t_2 = 2s$ γράφεται

$$y = 0.2\eta\mu 2\pi(5 - 0.25) \Rightarrow y = 0.2\eta\mu 9.5\pi \Rightarrow y = 0.2\eta\mu(9\pi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = -0.2$$



Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο τα σημεία που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή είναι τα Ρ και Τ και σε αντίθεση φάσης τα σημεία Π και Φ