ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

α. Εξίσωσεις κυμάτων $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ **και** $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$

β.Εξίσωση απομάκρυνσης $y = y_1 + y_2 \Rightarrow \ y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$

γ.Πλάτος ταλάντωσης $y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}$ από την οποία προκύπτουν

ι.όταν $\left|r_1 - r_2\right| = N\lambda$ τα σημεία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $A' = 2A$

ιι.όταν $\left|r_1 - r_2\right| = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ τα σημεία παραμένουν ακίνητα $A' = 0$

δ.Φάση $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

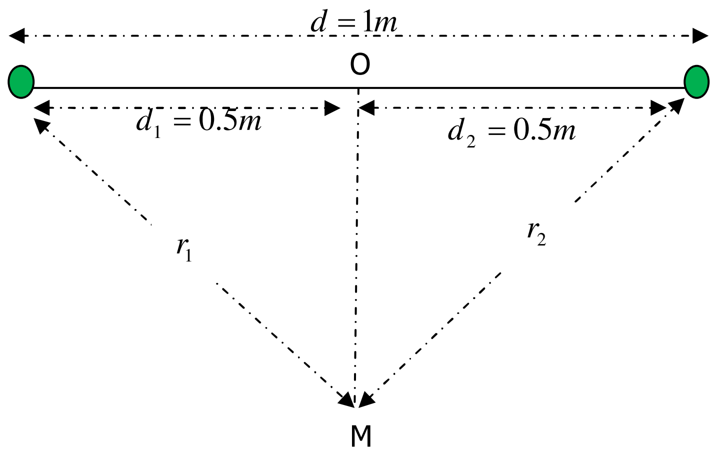
Επειδή σε κάθε σημείο η εξίσωση παίρνει συγκεκριμένη μορφή, για την εξίσωση του κύματος που προκύπτει από τη συμβολή μας χρειάζονται η περίοδος T (ή η συχνότητα f ή η γωνιακή ταχύτητα ω), το πλάτος ταλάντωσης A , το μήκος κύματος λ και οι αποστάσεις του σημείου από τις δύο πηγές

Στην άσκηση για συμβολή κυμάτων που ακολουθεί, γίνεται αναλυτική επεξεργασία 11 ερωτημάτων

ΑΣΚΗΣΗ – ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2011 (μικρή μετατροπή)

Στην επιφάνεια ενός υγρού που ηρεμεί, βρίσκονται δύο σύγχρονες σημειακές πηγές Π_1 και Π_2, που δημιουργούν στην επιφάνεια του υγρού εγκάρσια αρμονικά κύματα ίσου πλάτους. Οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας τους και κινούμενες προς την ίδια κατεύθυνση, την οποία θεωρούμε θετική. Η χρονική εξίσωση της ταλάντωσης ενός σημείου M , που βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$, μετά τη συμβολή των κυμάτων δίνεται στο SI από τη σχέση $y_M = 0.2\eta\mu 2\pi(5t - 10)$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $2m/s$. Έστω O το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ και $d = 1m$ η απόσταση μεταξύ των πηγών



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΣΗΜΕΙΑ
(Μ και Ο – σημεία της μεσοκαθέτου)

Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης των σημείων M και O (σημεία της μεσοκαθέτου)

Από τη σύγκριση των εξισώσεων $y_M = 0.2\eta\mu 2\pi(5t - 10)$

$$y_M = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

προκύπτουν $2A = 0.2 \Rightarrow A = 0.1m$ $\quad \frac{1}{T} = 5 \Rightarrow T = \frac{1}{5} = 0.2s$ $\quad f = \frac{1}{T} = 5Hz$ $\quad \omega = 2\pi f = 10\pi rad/s$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{2}{5} = 0.4m$$

$$\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} = 10 \Rightarrow \frac{2r_1}{2 \times 0.4} = 10 \Rightarrow 2r_1 = 8 \Rightarrow r_1 = 4m = r_2$$

Για το σημείο O γράφεται

$$y_O = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{d_1 - d_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_O = 0.2\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{0}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_O = 0.2\sigma\upsilon\nu 0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0.2} - \frac{1}{0.8}\right) \Rightarrow y_O = 0.2\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{1}{0.8}\right)$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο

ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ Μ και Ο

Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των σημείων M και O

Από την εξίσωση $y_M = 0.2\eta\mu 2\pi(5t - 10)$ προκύπτει $\phi_M = 2\pi(5t - 10) \Rightarrow \phi_M = 10\pi t - 20\pi$

Από την εξίσωση $y_O = 0.2\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{1}{0.8}\right)$ προκύπτει $\phi_O = 2\pi(5t - \frac{1}{0.8}) \Rightarrow \phi_O = 10\pi t - \frac{2\pi}{0.8}$

Επομένως η διαφορά φάσης των σημείων είναι

$$\phi_O - \phi_M = 10\pi t - \frac{2\pi}{0.8} - (10\pi t - 20\pi) \Rightarrow \Delta\phi = 10\pi t - \frac{2\pi}{0.8} - 10\pi t + 20\pi \Rightarrow \Delta\phi = 20\pi - \frac{2\pi}{0.8} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = \frac{16\pi}{0.8} - \frac{2\pi}{0.8} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{14\pi}{0.8} \Rightarrow \Delta\phi = 17.5\pi rad$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο

ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ $\Pi_1\Pi_2$ ΠΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΟΥ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΑΚΙΝΗΤΑ

Να υπολογίσετε τον αριθμό και τις θέσεις των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που ταλαντώνονονται με μέγιστο πλάτος και που παραμένουν ακίνητα

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΑΤΟΣ

Αριθμός σημείων

Για τα σημεία που έχουμε ενισχυτική συμβολή ισχύει $d_1 - d_2 = N\lambda \Rightarrow d_1 - (1 - d_1) = N\lambda \Rightarrow d_1 - 1 + d_1 = N\lambda \Rightarrow$

$$2d_1 = N\lambda + 1 \Rightarrow d_1 = \frac{N\lambda + 1}{2}$$

Αλλά ισχύει $0 < d_1 < 1 \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + 1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < N\lambda + 1 < 2 \Rightarrow -1 < 0.4N < +1 \Rightarrow -2.5 < N < +2.5 \Rightarrow$

άρα $N = -2, -1, 0, +1, +2$ πέντε σημεία

Θέσεις σημείων

Από τη σχέση $d_1 = \frac{N\lambda + 1}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{0.4N + 1}{2}$

για $N = -2$ έχουμε $d_1 = \frac{-0.8 + 1}{2} = 0.1m$

για $N = -1$ έχουμε $d_1 = \frac{-0.4 + 1}{2} = 0.3m$

για $N = 0$ έχουμε $d_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0.5m$

για $N = +1$ έχουμε $d_1 = \frac{0.4 + 1}{2} = 0.7m$

για $N = +2$ έχουμε $d_1 = \frac{0.8 + 1}{2} = 0.9m$

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΑΚΙΝΗΤΑ

Αριθμός σημείων

Για τα σημεία που έχουμε απόσβεση ισχύει

$$d_1 - d_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_1 - (1 - d_1) = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_1 - 1 + d_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2d_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + 1 \Rightarrow$$
$$d_1 = \frac{(2N+1)\lambda + 2}{4}$$

Αλλά ισχύει

$$0 < d_1 < 1 \Rightarrow 0 < \frac{(2N+1)\lambda + 2}{4} < 1 \Rightarrow 0 < (2N+1)\lambda + 2 < 4 \Rightarrow -2 < (2N+1)\lambda < 2 \Rightarrow$$
$$-2 < 0.8N + 0.4 < 2 \Rightarrow -2.4 < 0.8N < 1.6 \Rightarrow -3 < N < +2$$

άρα $N = -2, -1, 0, +1$ τέσσερα σημεία

Θέσεις σημείων

Από τη σχέση

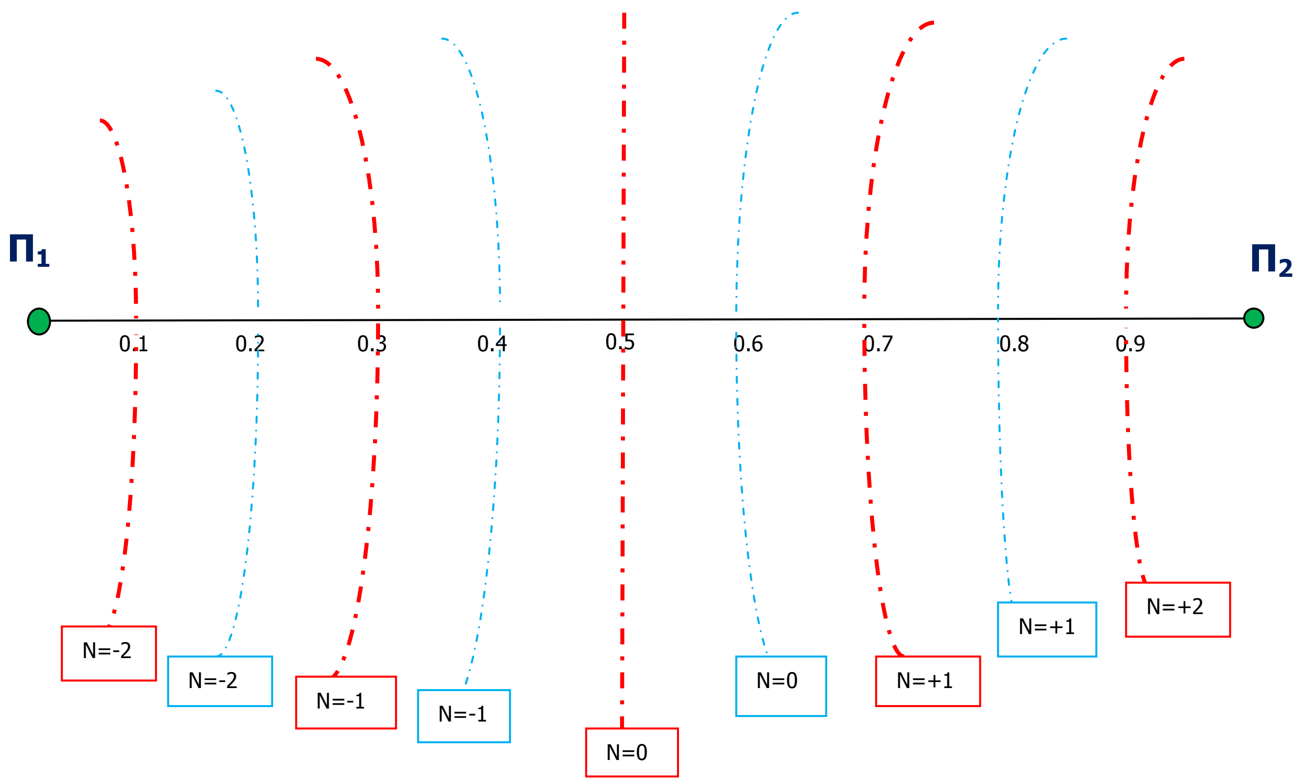
$$d_1 = \frac{(2N+1)\lambda + 2}{4} \Rightarrow d_1 = \frac{(2N+1)0.4+2}{4} \Rightarrow d_1 = \frac{0.8N+0.4+2}{4} \Rightarrow d_1 = \frac{0.8N+2.4}{4} \Rightarrow d_1 = 0.2N+0.6$$

για $N=-2$ έχουμε $d_1 = 0.2N+0.6 \Rightarrow d_1 = -0.4+0.6 = 0.2m$

για $N=-1$ έχουμε $d_1 = 0.2N+0.6 \Rightarrow d_1 = -0.2+0.6 = 0.4m$

για $N=0$ έχουμε $d_1 = 0.2N+0.6 \Rightarrow d_1 = 0+0.6 = 0.6m$

για $N=+1$ έχουμε $d_1 = 0.2N+0.6 \Rightarrow d_1 = 0.2+0.6 = 0.8m$



Με κόκκινο χρώμα ενισχυτική συμβολή και μπλε η απόσβεση

ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο

ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ $Π_1Π_2$ ΠΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΟΥ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΑΚΙΝΗΤΑ ΟΤΑΝ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΟΥΜΕ ΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΗΓΩΝ

Να υπολογίσετε τον αριθμό και τις θέσεις των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ που ταλαντώνονονται με μέγιστο πλάτος και που παραμένουν ακίνητα, όταν διπλασιάσουμε τη συχνότητα των πηγών

Από τα παραπάνω,η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $2m/s$ και το μήκος κύματος $0.4m$

Επειδή η ταχύτητα εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα, παραμένει σταθερή, επομένως για τη νέα συχνότητα θα ισχύει

$$\upsilon = f^{'}\lambda^{'} \Rightarrow \upsilon = 2f\lambda^{'} \Rightarrow \lambda^{'} = \frac{\upsilon}{2f} \Rightarrow \lambda^{'} = \frac{2}{2\times 5} \Rightarrow \lambda^{'} = \frac{1}{5} \Rightarrow \lambda^{'} = 0.2m$$

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΑΤΟΣ

Αριθμός σημείων

Για τα σημεία που έχουμε ενισχυτική συμβολή ισχύει $d_1 - d_2 = N\lambda^{'} \Rightarrow d_1 - (1 - d_1) = N\lambda \Rightarrow d_1 - 1 + d_1 = N\lambda^{'} \Rightarrow$

$$2d_1 = N\lambda^{'} + 1 \Rightarrow d_1 = \frac{N\lambda^{'} + 1}{2}$$

Αλλά ισχύει $0 < d_1 < 1 \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda^{'} + 1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < N\lambda^{'} + 1 < 2 \Rightarrow -1 < 0.2N < +1 \Rightarrow -5 < N < +5 \Rightarrow$

άρα $N = -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4$ εννέα σημεία

Θέσεις σημείων

Από τη σχέση $d_1 = \frac{N\lambda^{'} + 1}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{0.2N + 1}{2}$

για $N = -4$ έχουμε $d_1 = \frac{-0.8 + 1}{2} = 0.1m$

για $N = -3$ έχουμε $d_1 = \frac{-0.6 + 1}{2} = 0.2m$

για $N = -2$ έχουμε $d_1 = \frac{-0.4 + 1}{2} = 0.3m$

για $N = -1$ έχουμε $d_1 = \frac{-0.2 + 1}{2} = 0.4m$

για $N=0$ έχουμε $d_1=\frac{0+1}{2}=0.5m$

για $N=+1$ έχουμε $d_1=\frac{0.2+1}{2}=0.6m$

για $N=+2$ έχουμε $d_1=\frac{0.4+1}{2}=0.7m$

για $N=+3$ έχουμε $d_1=\frac{0.6+1}{2}=0.8m$

για $N=+4$ έχουμε $d_1=\frac{0.8+1}{2}=0.9m$

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΑΚΙΝΗΤΑ

Αριθμός σημείων

Για τα σημεία που έχουμε απόσβεση ισχύει

$$d_1-d_2=(2N+1)\frac{\lambda'}{2}\Rightarrow d_1-(1-d_1)=(2N+1)\frac{\lambda'}{2}\Rightarrow d_1-1+d_1=(2N+1)\frac{\lambda'}{2}\Rightarrow 2d_1=(2N+1)\frac{\lambda'}{2}+1\Rightarrow$$

$$d_1=\frac{(2N+1)\lambda'+2}{4}$$

Αλλά ισχύει

$$0<d_1<1\Rightarrow 0<\frac{(2N+1)\lambda'+2}{4}<1\Rightarrow 0<(2N+1)\lambda'+2<4\Rightarrow -2<(2N+1)\lambda'<+2\Rightarrow$$

$$-2<0.4N+0.2<2\Rightarrow -2.2<0.4N<1.8\Rightarrow -5.5<N<+4.5$$

άρα $N=-5,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4$ δέκα σημεία

Θέσεις σημείων

Από τη σχέση $d_1=\frac{(2N+1)\lambda'+2}{4}\Rightarrow d_1=\frac{(2N+1)0.2+2}{4}\Rightarrow d_1=\frac{0.4N+0.2+2}{4}\Rightarrow d_1=\frac{0.4N+2.2}{4}\Rightarrow$

$$d_1=0.1N+0.55$$

για $N=-5$ έχουμε $d_1=0.1N+0.55\Rightarrow d_1=-0.5+0.55=0.05m$

για $N=-4$ έχουμε $d_1=0.1N+0.55\Rightarrow d_1=-0.4+0.55=0.15m$

για $N=-3$ έχουμε $d_1=0.1N+0.55\Rightarrow d_1=-0.3+0.55=0.25m$

για $N=-2$ έχουμε $d_1=0.1N+0.55\Rightarrow d_1=-0.2+0.55=0.35m$

για $N=-1$ έχουμε $d_1=0.1N+0.55\Rightarrow d_1=-0.1+0.55=0.45m$

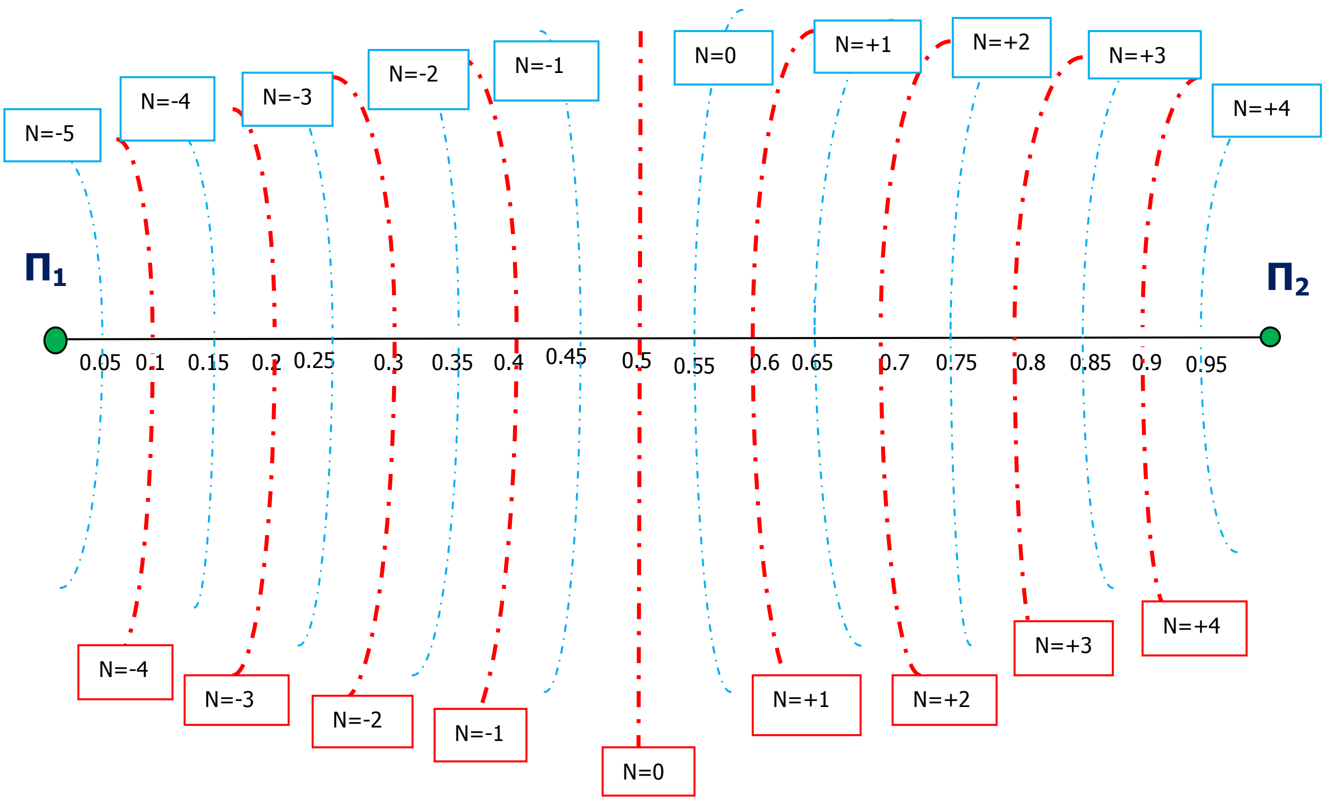
για $N=0$ έχουμε $d_1 = 0.1N + 0.55 \Rightarrow d_1 = 0 + 0.55 = 0.55m$

για $N=+1$ έχουμε $d_1 = 0.1N + 0.55 \Rightarrow d_1 = 0.1 + 0.55 = 0.65m$

για $N=+2$ έχουμε $d_1 = 0.1N + 0.55 \Rightarrow d_1 = 0.2 + 0.55 = 0.75m$

για $N=+3$ έχουμε $d_1 = 0.1N + 0.55 \Rightarrow d_1 = 0.3 + 0.55 = 0.85m$

για $N=+4$ έχουμε $d_1 = 0.1N + 0.55 \Rightarrow d_1 = 0.4 + 0.55 = 0.95m$



Με κόκκινο χρώμα ενισχυτική συμβολή και μπλε η απόσβεση

ΕΡΩΤΗΜΑ 5ο

ΝΑ ΣΧΕΔΙΑΣΕΤΕ ΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ Μ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΟ ΧΡΟΝΟ (Επειδή είναι σημείο της μεσοκαθέτου, τα κύματα φτάνουν ταυτόχρονα)

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου M σε συνάρτηση με το χρόνο

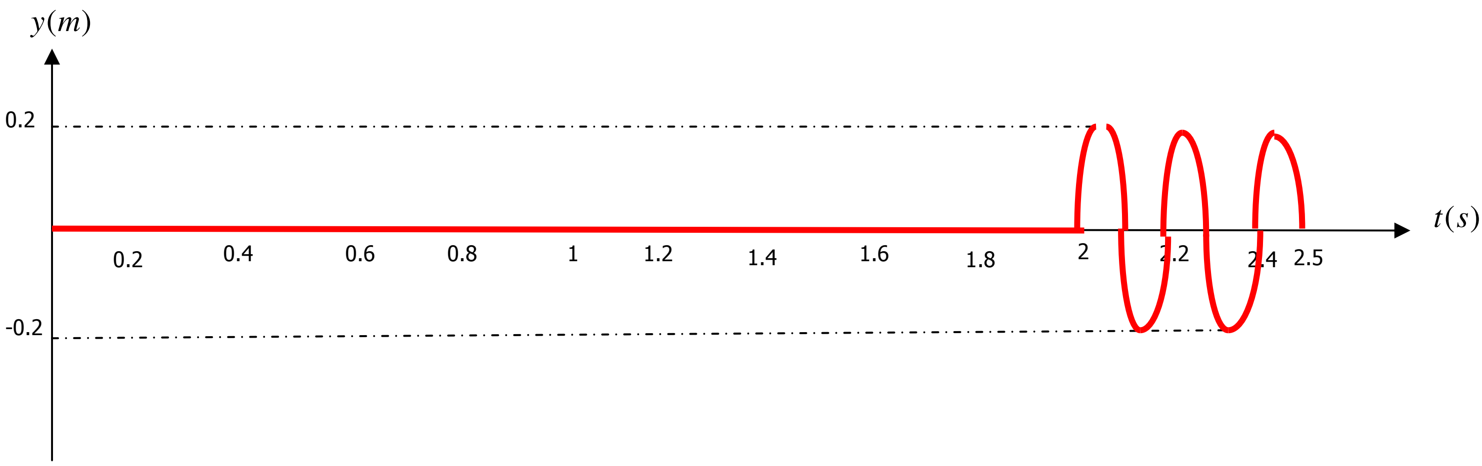
Η απόσταση του σημείου Μ από τις πηγές είναι $r_1 = 4m = r_2$

Λόγω ευθύγραμμης ομαλής κίνησης ο χρόνος που χρειάζονται τα κύματα να φτάσουν στο σημείο Μ είναι $r_1 = \upsilon t \Rightarrow$

$$t = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{4}{2} \Rightarrow t = 2s$$

επομένως η γραφική παράσταση είναι

$$y_M = \begin{cases} 0 & t \le 2s \\ 0.2\eta\mu 2\pi(5t-10) & 2s \le t \le 2.5s \end{cases}$$



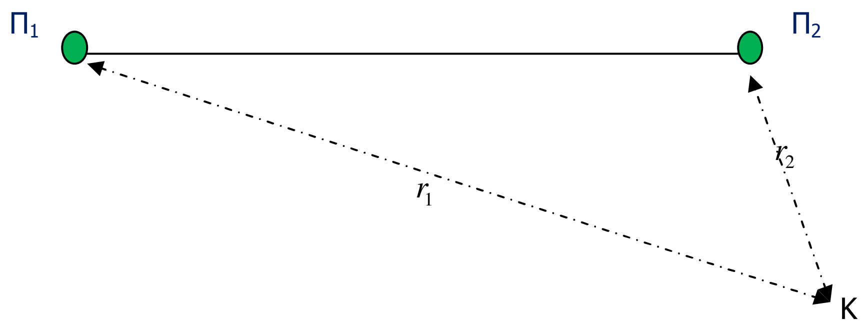
ΕΡΩΤΗΜΑ 6ο

ΝΑ ΣΧΕΔΙΑΣΕΤΕ ΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ Κ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΗΓΕΣ $r_1 = 6m$ ΚΑΙ $r_2 = 2m$ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΟ ΧΡΟΝΟ

(Επειδή δεν είναι σημείο της μεσοκαθέτου, τα κύματα δεν φτάνουν ταυτόχρονα)

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου K (με $r_1 = 6m$ $r_2 = 2m$) σε συνάρτηση με το χρόνο

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $2m/s$.



Στο σημείο φτάνει πρώτα το κύμα από την πηγή Π$_2$ και η εξίσωση του κύματος είναι

$$y_K = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow y_K = 0.1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0.2} - \frac{2}{0.8}\right) \Rightarrow y_K = 0.1\eta\mu 2\pi(5t - 2.5)$$

Για το σημείο K όταν φτάνουν και τα δύο κύματα η εξίσωση γράφεται

$$y_K = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_K = 0.2\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{4}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{8}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_K = 0.2\sigma\upsilon\nu 10\pi\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{8}{0.8}\right) \Rightarrow y_K = 0.2\eta\mu 2\pi(5t - 10)$$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή Π$_1$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_1 = \upsilon t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{6}{2} \Rightarrow t_1 = 3s$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή Π$_2$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_2 = \upsilon t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = \frac{2}{2} \Rightarrow t_2 = 1s$

επομένως η γραφική παράσταση είναι

$$y_K = \begin{cases} 0 & t \le 1s \\ 0.1\eta\mu 2\pi(5t-2.5) & 1s \le t \le 3s \\ 0.2\eta\mu 2\pi(5t-10) & 3s \le t \end{cases}$$

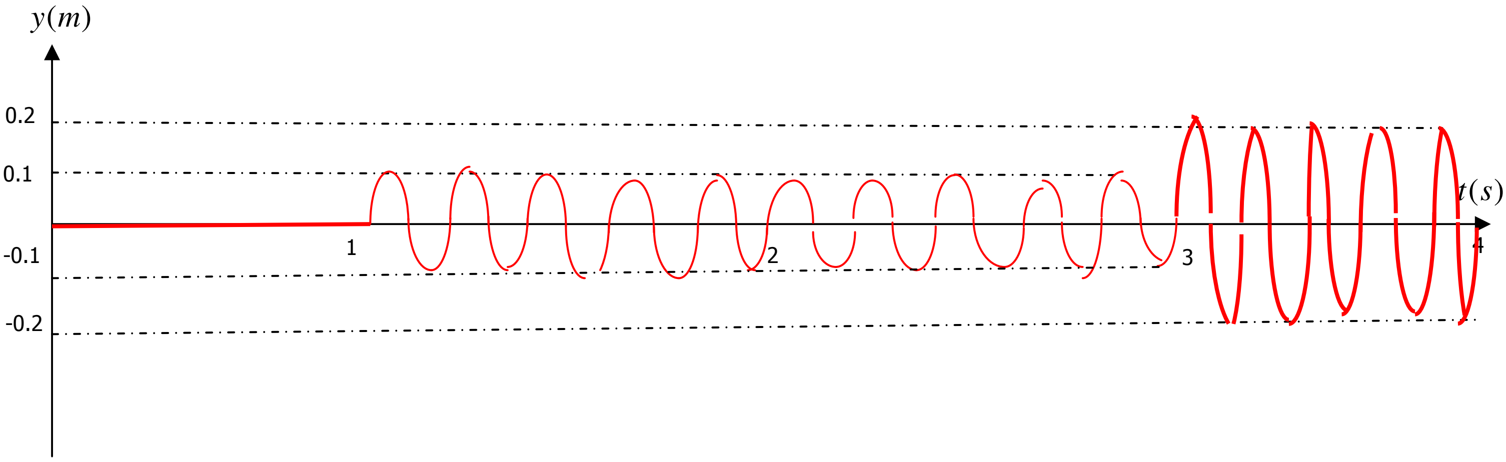
δηλαδή

από 0 έως $1s$ το σημείο K δεν εκτελεί ταλάντωση,

από $1s$ έως $3s$ εκτελεί ταλάντωση από το κύμα που προέρχεται από την πηγή $Π_2$ (εκτελεί ταλάντωση πλάτους $A = 0.1m$ για χρονικό διάστημα $2s = 10T$, επειδή $T = 0.2s$)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ φτάνει από την πηγή $Π_1$ το δεύτερο κύμα επομένως

από $3s$ και μετά εκτελεί ταλάντωση πλάτους $2A = 0.2m$ με την ίδια περίοδο $T = 0.2s$



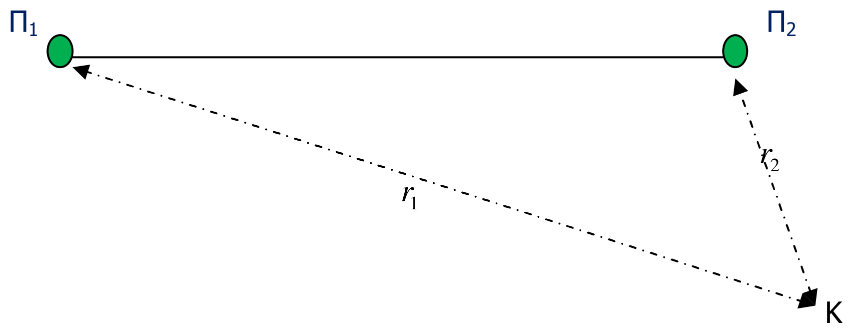
ΕΡΩΤΗΜΑ 7ο

ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ Κ ΤΙΣ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ $t_1 = 0.5s$ $t_2 = 1.5s$ ΚΑΙ $t_3 = 3.5s$

(Επειδή δεν είναι σημείο της μεσοκαθέτου, τα κύματα δεν φτάνουν ταυτόχρονα)

Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου K (με $r_1 = 6m$ $r_2 = 2m$) τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0.5s$ $t_2 = 1.5s$ και $t_3 = 3.5s$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $2m/s$ και το μήκος κύματος $0.4m$



ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ $t_1 = 0.5s$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή Π$_1$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_1 = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{6}{2} \Rightarrow t = 3s$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή Π$_2$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_2 = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{2}{2} \Rightarrow t = 1s$

δηλ. τη χρονική στιγμή $t_1 = 0.5s$ δεν έχει φτάσει κανένα κύμα επομένως η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ είναι μηδέν

ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ $t_2 = 1.5s$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή $Π_1$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_1 = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{6}{2} \Rightarrow t = 3s$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή $Π_2$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_2 = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{2}{2} \Rightarrow t = 1s$

δηλ. τη χρονική στιγμή $t_2 = 1.5s$ έχει φτάσει στο σημείο Κ το κύμα από την πηγή $Π_2$

Η εξίσωση του κύματος είναι $y_K = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow y_K = 0.1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0.2} - \frac{2}{0.8}\right) \Rightarrow y_K = 0.1\eta\mu 2\pi(5t - 2.5)$

επομένως η ταχύτητα είναι

$$\upsilon_K = \frac{dy_K}{dt} \Rightarrow \upsilon_K = 0.1 \times 10\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(5t - 2.5) \Rightarrow \upsilon_K = \pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(5 \times 1.5 - 2.5) \Rightarrow \upsilon_K = \pi\sigma\upsilon\nu 10\pi \Rightarrow$$
$$\upsilon_K = \pi m / s$$

ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ $t_3 = 3.5s$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή $Π_1$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_1 = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{6}{2} \Rightarrow t = 3s$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή $Π_2$ στο σημείο Κ χρειάζεται χρόνο $r_2 = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{2}{2} \Rightarrow t = 1s$

δηλ. τη χρονική στιγμή $t_3 = 3.5s$ έχουν φτάσει στο σημείο Κ τα κύματα από τις δύο πηγές

Για το σημείο K όταν φτάνουν και τα δύο κύματα η εξίσωση γράφεται

$$y_K = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_K = 0.2\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{4}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{8}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$
$$y_K = 0.2\sigma\upsilon\nu 10\pi\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{8}{0.8}\right) \Rightarrow y_K = 0.2\eta\mu 2\pi(5t - 10)$$

επομένως η ταχύτητα είναι

$$\upsilon_K = \frac{dy_K}{dt} \Rightarrow \upsilon_K = 0.1 \times 10\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(5t - 10) \Rightarrow \upsilon_K = \pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(5 \times 3.5 - 10) \Rightarrow \upsilon_K = \pi\sigma\upsilon\nu 15\pi \Rightarrow$$
$$\upsilon_K = \pi(-1) \Rightarrow \upsilon_K = -\pi m / s$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 8ο

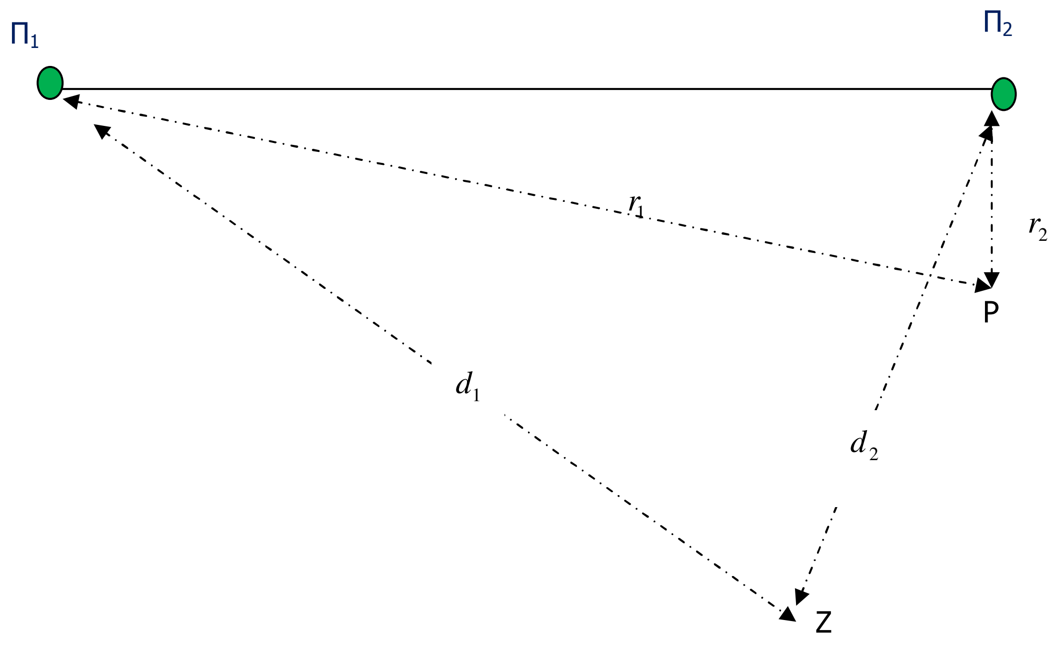
ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ ΤΩΝ ΥΠΕΡΒΟΛΩΝ ΜΕ ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ $Π_1Π_2$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $2m/s$ και το μήκος κύματος $0.4m$

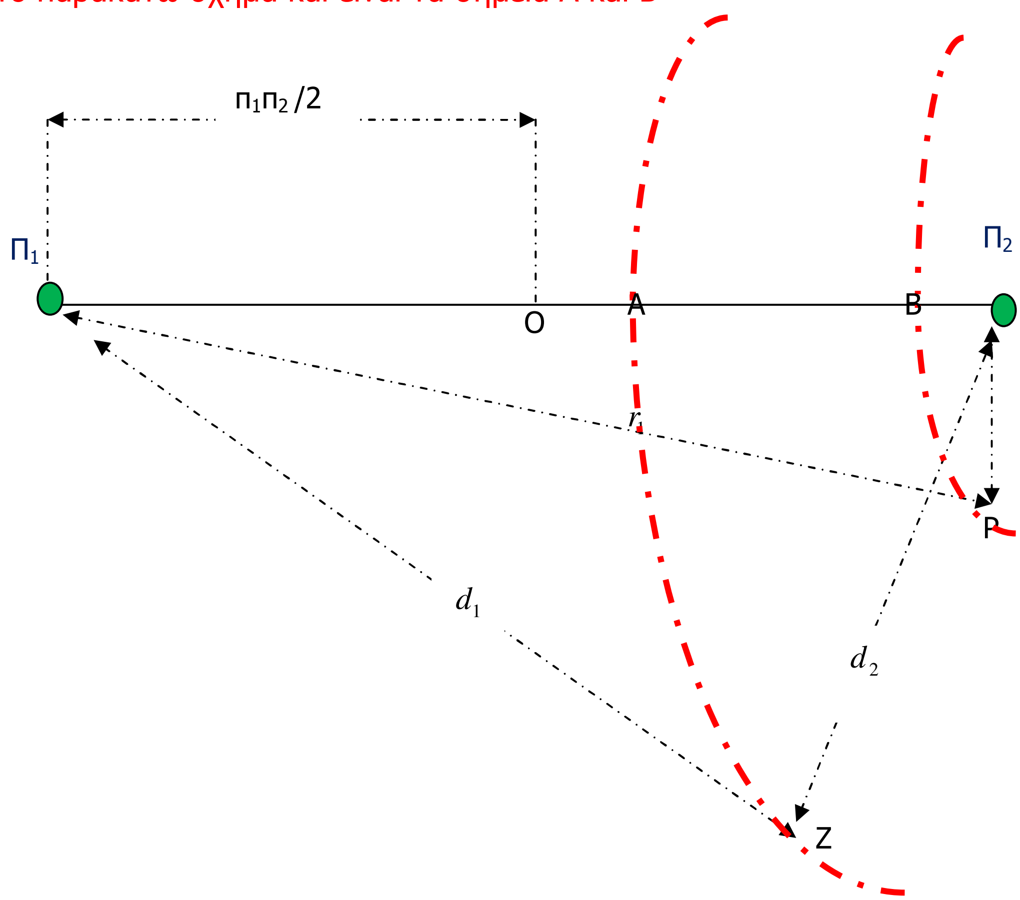
Έστω τα σημεία P και Z τα οποία απέχουν αποστάσεις

Το P απέχει $r_1 = 1.8m$ και $r_2 = 0.2m$

Το Z απέχει $d_1 = 1.2m$ και $d_2 = 0.8m$



Η τομή των υπερβολών που διέρχονται από τα σημεία P και Z με το ευθύγραμμο τμήμα Π$_1$Π$_2$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και είναι τα σημεία A και B



Εξετάζουμε τι έχουμε στα σημεία P και Z

Για το P έχουμε $r_1 - r_2 = 1.8m - 0.2m = 1.6m = 4\lambda$ άρα ενισχυτική συμβολή

Για το Z έχουμε $d_1 - d_2 = 1.2m - 0.8m = 0.4m = \lambda$ άρα ενισχυτική συμβολή

Για τα σημεία A και B του ευθύγραμμου τμήματος Π$_1$Π$_2$ ισχύουν

$A\Pi_1 - A\Pi_2 = d_1 - d_2 = 1.2m - 0.8m = 0.4m$

$B\Pi_1 - B\Pi_2 = r_1 - r_2 = 1.8m - 0.2m = 1.6m$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις και έχουμε

$B\Pi_1 - B\Pi_2 - A\Pi_1 + A\Pi_2 = 1.2m \Rightarrow AB + A\Pi_1 - (A\Pi_2 - AB) - A\Pi_1 + A\Pi_2 = 1.2m \Rightarrow$

$AB + A\Pi_1 - A\Pi_2 + AB - A\Pi_1 + A\Pi_2 = 1.2m \Rightarrow 2AB = 1.2m \Rightarrow AB = 0.6m$

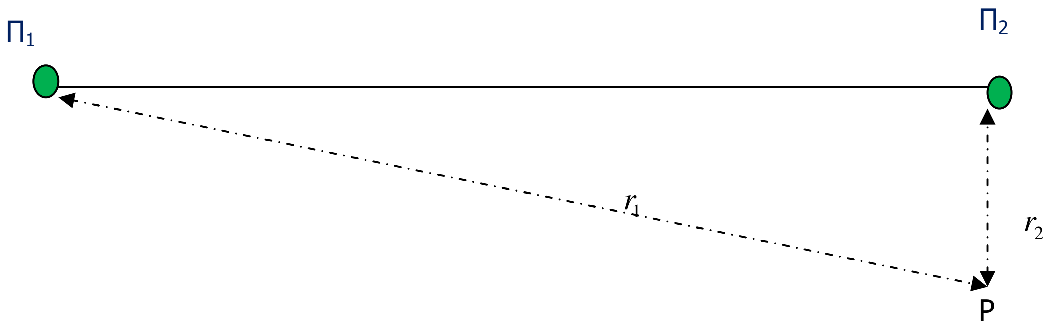
ΕΡΩΤΗΜΑ 9ο

ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΟΥΝ ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΕΧΟΥΜΕ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ, ΟΤΑΝ ΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΗΓΩΝ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΝΤΑΙ

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $2m/s$ και το μήκος κύματος $0.4m$

Έστω τα σημεία P το οποίο απέχει απόσταση $r_1 = 1.8m$ και $r_2 = 0.2m$ από τις πηγές

Αν η συχνότητα της πηγής μπορεί να μεταβάλλεται από $f_1 = 2Hz$ έως $f_2 = 10Hz$ να βρεθούν οι τιμές της συχνότητας για τις οποίες έχουμε ενισχυτική συμβολή



Για τα σημεία που έχουμε ενισχυτική συμβολή ισχύει $r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = N\dfrac{\upsilon}{f} \Rightarrow 1.6f = N\upsilon \Rightarrow f = 1.25N$

Αλλά $2 \le f \le 8 \Rightarrow 2 \le 1.25N \le 8 \Rightarrow 1.6 \le N \le 6.4$ άρα $N = +2,+3,+4,+5,+6$ πέντε τιμές

Από τη σχέση $f = 1.25N$

για $N = +2$ έχουμε $f = 1.25 \times 2 = 2.5Hz$

για $N = +3$ έχουμε $f = 1.25 \times 3 = 3.75Hz$

για $N = +4$ έχουμε $f = 1.25 \times 4 = 5Hz$

για $N = +5$ έχουμε $f = 1.25 \times 5 = 6.25Hz$

για $N = +6$ έχουμε $f = 1.25 \times 6 = 7.5Hz$

ΕΡΩΤΗΜΑ 10ο

ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΥΠΕΡΒΟΛΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ Α ΚΑΙ Β

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $2m/s$ και το μήκος κύματος $0.4m$

Από τα σημεία Α και Β του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ διέρχονται υπερβολές

1ος τρόπος

Έστω σημείο Γ μεταξύ τους στο οποίο έχουμε ενισχυτική συμβολή και βρίσκεται μεταξύ των υπερβολών που διέρχονται από τα σημεία Α και Β.

Για τα σημεία ισχύουν

$r_1 - r_2 = 1.8m - 0.2m = 1.6m$ και

$d_1 - d_2 = 1.2m - 0.8m = 0.4m$

Για το σημείο Γ θα ισχύει

$\Gamma\Pi_1 - \Gamma\Pi_2 = N\lambda \Rightarrow \Gamma\Pi_1 - \Gamma\Pi_2 = 0.4N$

επομένως θα ισχύει $0.4 \le 0.4N \le 1.6 \Rightarrow 1 \le N \le 4$ δηλ. $N=1$, $N=2$, $N=3$ και $N=4$

Οι υπερβολές για $N=1$ και $N=4$ περνούν από τα σημεία Α και Β επομένως ενδιάμεσα υπάρχουν οι υπερβολές για $N=2$ και $N=3$

2ος τρόπος

Από την προηγούμενη επεξεργασία προέκυψε ότι έχουμε ενισχυτική συμβολή στα σημεία Ρ και Ζ ως εξής

Για το P έχουμε $r_1 - r_2 = 1.8m - 0.2m = 1.6m = 4\lambda$ άρα ενισχυτική συμβολή για N=4

Για το Z έχουμε $d_1 - d_2 = 1.2m - 0.8m = 0.4m = \lambda$ άρα ενισχυτική συμβολή για N=1

Μεταξύ τους πρέπει να υπάρχουν άλλα δύο σημεία ενισχυτικής συμβολής για N=2 και N=3

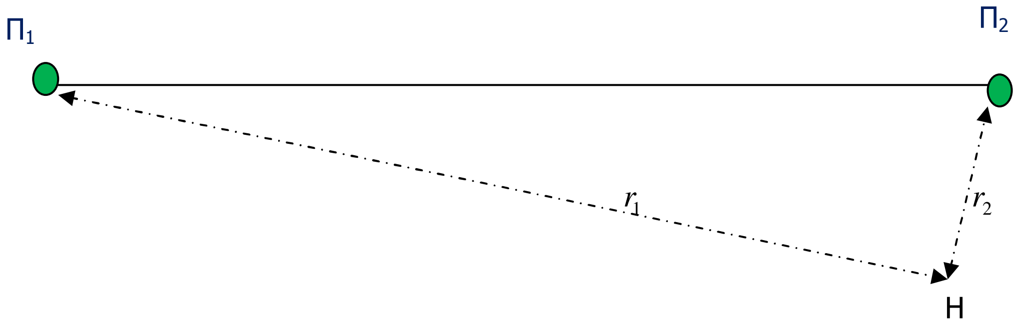
Σημείωση

Η σχέση για να έχουμε ενισχυτική συμβολή είναι $r_1 - r_2 = N\lambda$

ΕΡΩΤΗΜΑ 11ο

ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ ΤΟ ΠΛΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ Η ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΕΙΝΑΙ $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

Έστω το σημείο H



Εξίσωσεις κυμάτων $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ και $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$

επομένως $\phi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ και $\phi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{r_1}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{r_2}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi = -2\pi\frac{r_1}{\lambda} + 2\pi\frac{r_2}{\lambda} \Rightarrow$$

$\Delta\phi = 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ επειδή $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi\frac{r_2 - r_1}{2\lambda} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

Πλάτος ταλάντωσης σημείου $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\, |\, 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\, |$ επομένως $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Rightarrow A' = 2A\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A' = A\sqrt{2}m$

Σημείωση

Για τα σημεία της μεσοκαθέτου την ίδια χρονική στιγμή τα δύο κύματα έχουν την ίδια φάση δηλ. $\phi_1 = \phi_2$ επομένως $\Delta\phi = 0$