ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ…ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΚΥΜΑ.

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό και κατά μήκος του άξονα x'x, προς τη θετική κατεύθυνση. Κάποια χρονική στιγμή προσπίπτει σε μια πλήρως ανακλαστική επιφάνεια η οποία είναι τοποθετημένη κάθετα στη πορεία διάδοσης του κύματος.

Μετά την πρόσπτωση το κύμα ανακλάται και δημιουργείται στάσιμο ΗΜ κύμα αντίστοιχων ιδιοτήτων του στάσιμου που δημιουργείται σε τεντωμένη χορδή το ένα άκρο της οποίας είναι ακλόνητο.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου του προσπίπτοντος κύματος δίνεται από την εξίσωση

$$B=2\cdot 10^{-10}\eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{4}10^{8}t-\frac{x}{4}\right) \quad (S.I.) \quad (1).$$

Έστω στη θέση x=0 ότι βρίσκεται κοιλία του στάσιμου κύματος, η οποία απέχει από την ανακλαστική επιφάνεια d=123m.

Θεωρούμε ως t=0, τη χρονική στιγμή που η ένταση B στη θέση x=0 είναι B=0 και έχοντας θετικό ρυθμό μεταβολής, τείνει να πάρει θετική τιμή. Δίνεται η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό: $c_0=3\cdot 10^8$ m/s.

1. Να δώσετε την εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του στάσιμου ΗΜ κύματος που έχει προκύψει.
2. Να βρείτε το πλήθος των δεσμών και των κοιλιών του στάσιμου ΗΜ κύματος από τη θέση x=0 μέχρι την ανακλαστική επιφάνεια και να προσδιορίσετε τις θέσεις τους.
3. Έστω ένα σημείο Α στη θέση x_A=12.5m. Να βρείτε τις θέσεις όλων των σημείων, που έχουν το ίδιο πλάτος έντασης B_{0A} με το σημείο Α.
4. Να προσδιορίσετε τις θέσεις των πλησιέστερων σημείων στον πέμπτο δεσμό που έχουν πλάτος έντασης $B'_0/2$ (όπου B'_0 το μέγιστο πλάτος έντασης του στάσιμου) .
5. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Κ με x_K=52m και Λ με x_Λ=62.5m.
6. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της έντασης του μαγνητικού πεδίου του στάσιμου ΗΜ κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1=0,\ t_2=\frac{T}{4},\ \ t_3=\frac{2T}{4},\ t_4=\frac{3T}{4}$ μόνο για την περιοχή που καλύπτει απόσταση d'=8m (αριστερά) από την ανακλαστική επιφάνεια, με το σημείο στην ανακλαστική επιφάνεια να διατηρεί τις ιδιότητες που του αποδώσαμε πριν, δηλαδή να είναι δεσμός.
7. Να αποδείξετε ότι υπάρχει διακριτό πλήθος επιτρεπόμενων συχνοτήτων που μπορούν να δώσουν στάσιμο ΗΜ κύμα στη συγκεκριμένη περιοχή d, και να υπολογίσετε το πλήθος των δεσμών στη περιοχή d αν το στάσιμο είχε δημιουργηθεί με τη δεύτερη διακριτή συχνότητα.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΜΥΡΟΓΙΑΝΝΗΣ delta-m@ath.forthnet.gr

1. Εύκολα με παρατήρηση της (1) λαμβάνουμε τις πληροφορίες:

$B_0=2\cdot10^{-10}$ T , $f=\frac{3}{4}10^8$ Hz , $T=\frac{4}{3}10^{-8}$ s και $\lambda=4m$.

Η εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του στάσιμου ΗΜ κύματος προκύπτει με την ίδια μαθηματική διαδικασία (και τα ΗΜ κύματα υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας) όπως και στα στάσιμα σε τεντωμένη χορδή.
Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη πληροφορία ότι την t=0, η ένταση B στη θέση x=0 είναι μηδέν και τείνει σε θετική τιμή, δίνουμε την «κλασική» εξίσωση έντασης B του μαγνητικού πεδίου του στάσιμου ΗΜ κύματος (θα μπορούσαμε εύκολα να το αποδείξουμε ακλουθώντας την αρχή της επαλληλίας και το γνωστό τριγωνομετρικό τύπο):

$$B = 4\cdot10^{-10}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu(\frac{3}{2}\cdot10^8\pi t) \text{ (S.I.) με } B'_0 = |2\cdot B_0| = 4\cdot10^{-10}\text{ T} .$$

2. Ας το δούμε αρχικά με ένα απλό μαθηματικό τέχνασμα.
Αν διαιρέσουμε την απόσταση d με το μήκος λ/4, θα λάβουμε τον αριθμό των υπο-διαστημάτων που ορίζουν οι δεσμοί και οι κοιλίες στο διάστημα μήκους d.
Προσθέτοντας στο αποτέλεσμα τον αριθμό 1, βρίσκουμε τον αριθμό των σημείων που καθορίζουν τα διαστήματα (π.χ. 3 σημεία ορίζουν 2 διαστήματα), άρα δεσμούς και κοιλίες μαζί.
Με δεδομένο ότι ξεκινάμε από κοιλία και καταλήγουμε σε δεσμό, το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι κατ'ανάγκην άρτιος αριθμός και μια απλή διαίρεση δια 2, θα μας δώσει τον αριθμό των κοιλιών που φυσικά είναι ίσος με τον αριθμό των δεσμών.
Αν και στα δυο άκρα της περιοχής της χορδής, που εξετάζεται, έχουμε δεσμούς τότε η «διαίρεση δια 2» δίνει μη ακέραιο αποτέλεσμα, το οποίο προσαρμόζουμε στην αμέσως μεγαλύτερη ακέραια τάξη μονάδας για να δώσουμε τον αριθμό των δεσμών και στην αμέσως μικρότερη για τις κοιλίες («υπερτερούν» οι δεσμοί, βλέπε ερ. 6).
Αντίστοιχα σκεπτόμαστε αν στα δυο άκρα «της υπό εξέταση περιοχής» έχουμε κοιλίες, όπου φυσικά «υπερτερούν» οι κοιλίες. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{d}{\frac{\lambda}{4}} = \frac{123}{1} = 123\ \delta\iota\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha \Rightarrow (123+1)\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha = 124\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha \Rightarrow \begin{cases} \frac{124}{2} = 62 & \Delta \\ \frac{124}{2} = 62 & K \end{cases} .$$

Ας το δούμε τώρα πιο αναλυτικά.
Οι θέσεις x_Δ των δεσμών δίνονται από την εξίσωση $x_\Delta = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}$ και «περιορίζονται» στην περιοχή μήκους d:

$$0 \le (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \le d \overset{d=123m,\ \lambda=4m}{\Rightarrow} -1 \le 2\kappa \le 123-1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \kappa \le 61 .$$

Παρατηρούμε ότι οι «δυνατές» ακέραιες τιμές του κ=0,1,2,…,61 είναι 62 και οι

θέσεις των δεσμών είναι: $x_{\Delta} = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \overset{\lambda=4m}{\Rightarrow} \begin{cases} \gamma\iota\alpha\ \kappa = 0 \Rightarrow x_{\Delta 1} = 1m \\ \gamma\iota\alpha\ \kappa = 1 \Rightarrow x_{\Delta 2} = 3m \\ \vdots \\ \gamma\iota\alpha\ \kappa = 61 \Rightarrow x_{\Delta 62} = 123m \end{cases}$.

Οι θέσεις x_K των κοιλιών δίνονται από την εξίσωση $x_K = \kappa\frac{\lambda}{2}$ και «περιορίζονται» στην περιοχή μήκους d:

$$0 \le \kappa\frac{\lambda}{2} \le d \overset{d=123m,\ \lambda=4m}{\Rightarrow} 0 \le 2\kappa \le 123 \Rightarrow 0 \le \kappa \le \frac{123}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι οι «δυνατές» ακέραιες τιμές του κ=0,1,2,…,61 είναι 62 και οι

θέσεις των κοιλιών είναι: $x_K = \kappa\frac{\lambda}{2} \overset{\lambda=4m}{\Rightarrow} \begin{cases} \gamma\iota\alpha\ \kappa = 0 \Rightarrow x_{K1} = 0 \\ \gamma\iota\alpha\ \kappa = 1 \Rightarrow x_{K2} = 2m \\ \vdots \\ \gamma\iota\alpha\ \kappa = 61 \Rightarrow x_{K62} = 122m \end{cases}$.

3. Έχουμε ότι x_A=12.5m, οπότε το πλάτος B_{0A} της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$B_{0A} = |2B_0\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_A}{\lambda}| \Rightarrow B_{0A} = |4\cdot 10^{-10}\sigma\upsilon\nu\frac{2\cdot\pi\cdot 12.5}{4}| \Rightarrow B_{0A} = 2\sqrt{2}\cdot 10^{-10}\ T\,.$$

Τώρα θα απαιτήσουμε $|B_{0M}| = 2\sqrt{2}\cdot 10^{-10} \Rightarrow |2B_0\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda}| = 2\sqrt{2}\cdot 10^{-10} \Rightarrow$

$$\left|4\cdot 10^{-10}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{4}\right| = 2\sqrt{2}\cdot 10^{-10} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x_M}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x_M}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x_M}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x_M}{2} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi x_M}{2} = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 4\kappa \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 4\kappa + \frac{1}{2} \overset{\kappa=0,1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 0.5, \quad 4.5, \quad 8.5 \dots \\ x_M = 4\kappa - \frac{1}{2} \overset{\kappa=1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 3.5, \quad 7.5, \quad 11.5 \dots \end{cases} \\ x_M = 4\kappa \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 4\kappa + \frac{3}{2} \overset{\kappa=0,1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 1.5, \quad 5.5, \quad 9.5 \dots \\ x_M = 4\kappa - \frac{3}{2} \overset{\kappa=1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 2.5, \quad 6.5, \quad 10.5 \dots \end{cases} \end{cases}$$

4. Τα σημεία θα τα βρούμε λύνοντας την εξίσωση:

$$|B_{0M}| = \frac{B_0'}{2} \Rightarrow |B_{0M}| = 2 \cdot 10^{-10} \Rightarrow \left|2B_0 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda}\right| = 2 \cdot 10^{-10} \Rightarrow \left|4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{4}\right| = 2 \cdot 10^{-10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{4} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x_M}{2} = \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x_M}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x_M}{2} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi x_M}{2} = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 4\kappa \pm \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 4\kappa + \frac{2}{3} \overset{\kappa=0,1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 0.67,\ 4.67,\ 8.67 \dots \\ x_M = 4\kappa - \frac{2}{3} \overset{\kappa=1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 3.33,\ 7.33,\ 11.33 \dots \end{cases} \\ x_M = 4\kappa \pm \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 4\kappa + \frac{4}{3} \overset{\kappa=0,1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 1.33,\ 5.33,\ 9.33 \dots \\ x_M = 4\kappa - \frac{4}{3} \overset{\kappa=1,2,\dots}{\Rightarrow} x_M = 2.67,\ 6.67,\ 10.67 \dots \end{cases} \end{cases}$$

Ο πέμπτος δεσμός βρίσκεται στη θέση $x_{\Delta 5}$=9m, άρα τα πλησιέστερα, από τα προηγούμενα σημεία,σε αυτόν το δεσμό είναι στις θέσεις $x = 8.67m \; \kappa\alpha\iota \; x = 9.33m$.

5. Βρίσκουμε τις εξισώσεις έντασης μαγνητικού πεδίου του στάσιμου ΗΜ κύματος για το κάθε σημείο:

$$B_K = 4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} \eta\mu \left(\frac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right) \overset{x_K=52m}{\Rightarrow} B_K = 4 \cdot 10^{-10} \eta\mu \left(\frac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right)$$

και $B_\Lambda = 4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} \eta\mu \left(\frac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right) \overset{x_K=62.5m}{\Rightarrow}$

$$B_\Lambda = 4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu \left(31\pi + \frac{\pi}{4}\right) \eta\mu \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right) \Rightarrow$$

$$B_{\Lambda} = 4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu(\pi + \tfrac{\pi}{4})\eta\mu\left(\tfrac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right) \Rightarrow$$

$$B_{\Lambda} = -4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu\tfrac{\pi}{4}\eta\mu\left(\tfrac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right) \Rightarrow$$

$$B_{\Lambda} = -2\sqrt{2} \cdot 10^{-10} \eta\mu\left(\tfrac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right) \overset{\substack{\pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ \nu\alpha \\ \alpha\pi o\rho\rho o\varphi\eta\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ (-)}}{\Rightarrow}$$

$$B_{\Lambda} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-10} \eta\mu\left(\tfrac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t + \pi}\right) \Rightarrow$$

$$B_{\Lambda} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-10} \eta\mu\left(\tfrac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t + \pi}\right) \ .$$

Τώρα θα αφαιρέσουμε τις δυο φάσεις που πρόεκυψαν:

$$\Delta\varphi = \left(\tfrac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t + \pi}\right) - \left(\tfrac{3}{2} \cdot \mathbf{10^8 \pi t}\right) = \pi \ .$$

Εδώ να τονίσουμε ότι δυο είναι τα «εφικτά» αποτελέσματα, για οποιαδήποτε σημεία και αν επιλεγούν : $\Delta\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$.

6. Έχουμε

$$\frac{d'}{\lambda/4} = 8\ \delta\iota\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha \Rightarrow 9\ \sigma\eta\mu\varepsilon\iota\alpha\ (\upsilon\pi\varepsilon\rho\tau\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}\nu\ o\iota\ \delta\varepsilon\sigma\mu o\acute{\iota}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{2} = 4.5 \Rightarrow 5\Delta \\ \frac{9}{2} = 4.5 \Rightarrow 4K \end{cases}$$

- Το πρώτο σημείο βρίσκεται στη θέση x_1=d-d'=115m, έχει πλάτος B_{01}=0 και είναι δεσμός, κάτι που επιβεβαιώνεται από την εξίσωση του ΗΜ κύματος :

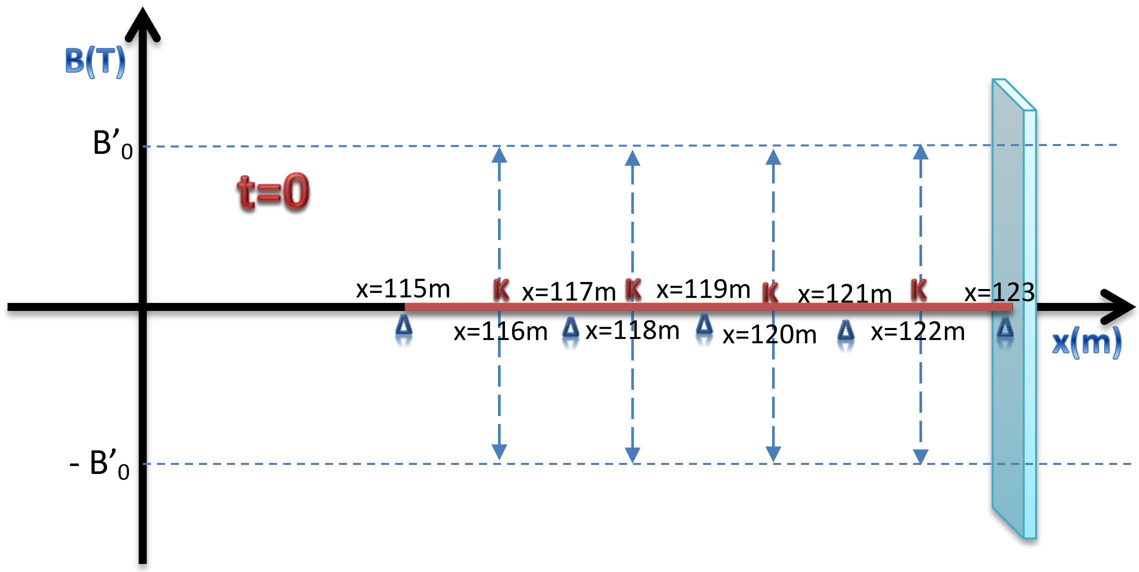
$$B_1 = 4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi 115}{2}\eta\mu\left(\frac{3}{2} \cdot 10^8 \pi t\right) = 0\,.$$

Το δεύτερο σημείο στη θέση x_2=x_1+(λ/4)=116 m, έχει πλάτος

B_0=$|4 \cdot 10^{-10} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi 116}{2}| = 4 \cdot 10^{-10}$ T, είναι κοιλία, και την t=0 έχει:

$$B_2 = 4 \cdot 10^{-10} \eta\mu\left(\tfrac{3}{2} \cdot 10^8 \pi \cdot 0\right) = 0 \ldots \kappa\tau\lambda..$$

Είναι προφανές ότι όλα τα σημεία την t=0, έχουν B=0 [αφού $\eta\mu\left(\frac{3}{2}\cdot 10^8\pi\cdot 0\right)=0$] :

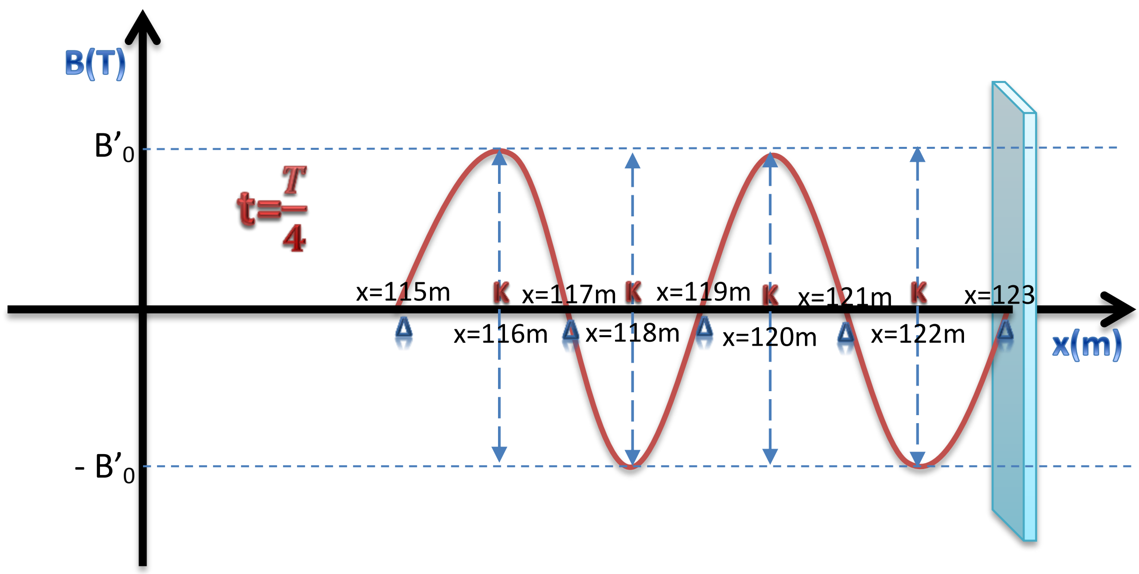


➢ Όπως είπαμε και πριν, το πρώτο σημείο βρίσκεται στη θέση x_1=d-d'=115m, έχει πλάτος B_{01}=0 και είναι δεσμός.

Το δεύτερο σημείο στη θέση $x_2=x_1+(\lambda/4)$=116 m, έχει πλάτος

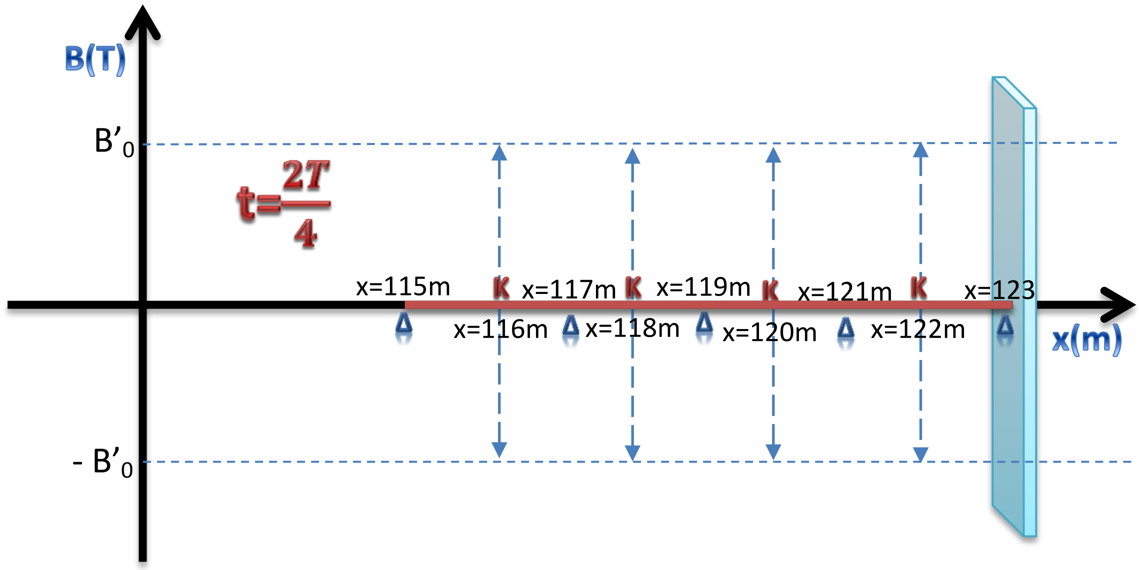
$B_0=\left|4\cdot 10^{-10}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi 116}{2}\right|=4\cdot 10^{-10}$ T, είναι κοιλία, και την $t=\frac{T}{4}=\frac{1}{3}10^{-8}s$ έχει:

$$B_2=4\cdot 10^{-10}\eta\mu\left(\frac{3}{2}\cdot 10^8\pi\cdot\frac{10^{-8}}{3}\right)=4\cdot 10^{-10}T\ \dots\kappa\tau\lambda..$$

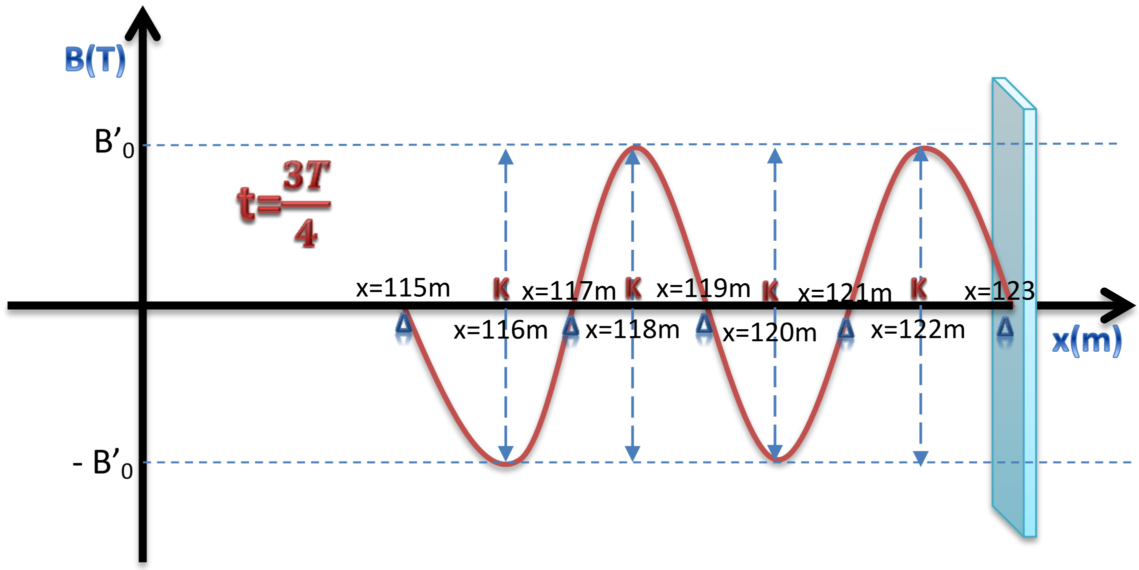


ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΜΥΡΟΓΙΑΝΝΗΣ delta-m@ath.forthnet.gr

➢ Ομοίως σκεπτόμενοι για την $t = \frac{2T}{4}$ έχουμε:



➢ Και αντιστοίχως για την $t = \frac{3T}{4}$ έχουμε:



…και έτσι εναλλάσσονται οι δυο «μορφές» συνεχώς.

7. Για να υφίσταται το στάσιμο κύμα θα πρέπει η ανακλαστική επιφάνεια στη θέση x=d=123m να αποτελεί συνεχώς δεσμό και αυτό εξασφαλίζεται αν τα λ,f ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{cases} d = (2\kappa+1)\cdot\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4d}{2\kappa+1} \quad (1) \\ \kappa\alpha\iota \\ f = \frac{c_0}{\lambda} \overset{(1)}{\Rightarrow} f = \frac{(2\kappa+1)c_0}{4\cdot d} \end{cases} \quad ό\pi o\upsilon\ \kappa = 0,1,2,3\ ...$$

Παρατηρούμε λοιπόν διακριτό πλήθος επιτρεπόμενων συχνοτήτων:

$$\begin{cases} f_0 = \frac{c_0}{4\cdot d} = \frac{3\cdot 10^8}{492}\ Hz \\ f_1 = \frac{3\cdot c_0}{4\cdot d} = \frac{9\cdot 10^8}{492}\ Hz \\ f_2 = \frac{5\cdot c_0}{4\cdot d} = \frac{15\cdot 10^8}{492}\ Hz \\ \vdots \\ f_{61} = \frac{123\cdot c_0}{4\cdot d} = \frac{369\cdot 10^8}{492} = \frac{3}{4}10^8\ Hz (\alpha\upsilon\tau ή\ \varepsilon ί\nu\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\chi\nu ό\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ \sigma\tau ά\sigma\iota\mu o\upsilon\ HM\ \pi o\upsilon\ \mu\varepsilon\lambda\varepsilon\tau ή\sigma\alpha\mu\varepsilon) \\ \vdots \end{cases}$$

Τώρα αν το στάσιμο ΗΜ κύμα είχε δημιουργηθεί με τη δεύτερη διακριτή συχνότητα, δηλαδή με $f_1 = \frac{9\cdot 10^8}{492}\ Hz$, τότε θα είχε μήκος κύματος $\lambda' = \frac{c_0}{f_1} = \frac{\frac{3\cdot 10^8}{1}}{\frac{9\cdot 10^8}{492}} = 164m$.

Τότε ο αριθμός των δεσμών και των κοιλιών στην συγκεκριμένη περιοχή d θα ήταν:

$$\frac{d}{\lambda/4} = 3\ \delta\iota\alpha\sigma\tau ή\mu\alpha\tau\alpha \Rightarrow 4\ \sigma\eta\mu\varepsilon\iota\alpha(\alpha\rho.\delta\varepsilon\sigma\mu ώ\nu = \alpha\rho.\kappa o\iota\lambda\iota ώ\nu) \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow 2\Delta \\ \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow 2K \end{cases}.$$