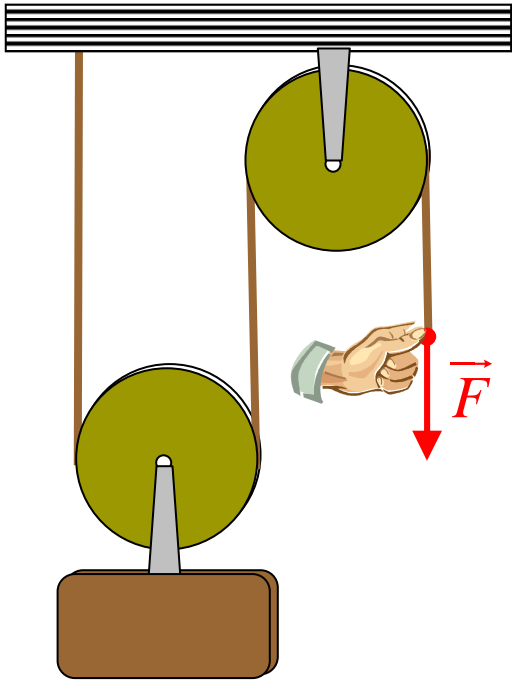


Η κινητή και η ακίνητη τροχαλία.



Οι δύο τροχαλίες του σχήματος είναι ολόιδιες. Έχουν μάζα $m = 2\text{kg}$ κάθε μία και ακτίνες $R = 0,2\text{m}$. Στην κινητή κρεμάμε σώμα μάζας $M = 3\text{kg}$. Τα σχοινιά είναι αμελητέου πάχους, αμελητέας μάζας και μη εκτατά. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

1. Πόση είναι η δύναμη που αν ασκηθεί στο άκρο του σχοινιού θα οδηγήσει το σύστημα σε ισορροπία ;

Αν αντί αυτής ασκηθεί δύναμη $F = 30\text{N}$ στο άκρο του σχοινιού τότε:

2. Ποιος ο λόγος των γωνιακών επιταχύνσεων των δύο τροχαλιών ;
3. Βρείτε την επιτάχυνση του κρεμασμένου σώματος, τις γωνιακές επιταχύνσεις των τροχαλιών και την επιτάχυνση με την οποία κινείται το άκρο του σχοινιού.
4. Την στιγμή που το σώμα έχει ανυψωθεί κατά $0,5\text{m}$ βρείτε το έργο που το χέρι θα έχει προσφέρει καθώς και τον ρυθμό παραγωγής έργου από το χέρι.

Απάντηση:

1..Η κινητή τροχαλία δεν περιστρέφεται οπότε :

$$T_1 \cdot R = T_2 R \Rightarrow T_1 = T_2$$

Ούτε η ακίνητη περιστρέφεται άρα :

$$F \cdot R = T_2 R \Rightarrow F = T_2$$

Φυσικά :

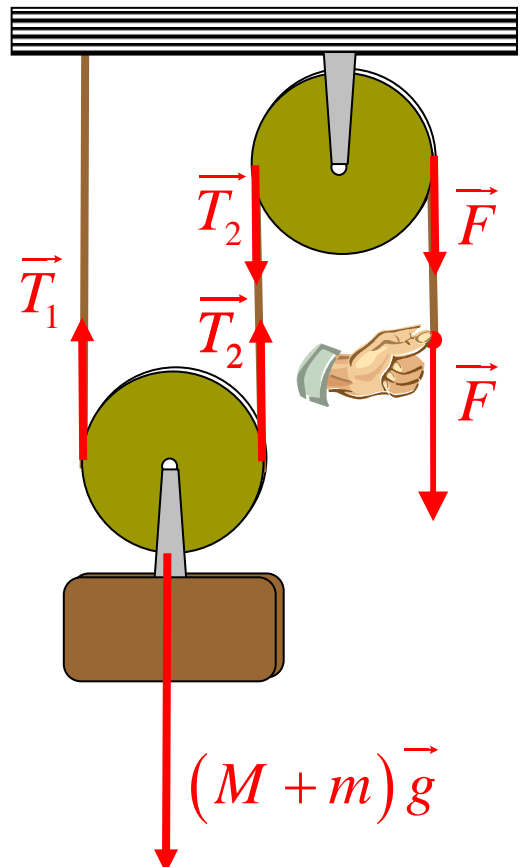
$$F = T_1$$

Το σύστημα κινητή τροχαλία – σώμα ισορροπεί επομένως:

$$T_1 + T_2 = (M + m) g \Rightarrow 2F = (M + m) g$$

$$\Rightarrow F = \frac{(M + m) g}{2} = 25\text{N}$$

Δηλαδή κρατάμε ή ανυψώνουμε με σταθερή ταχύτητα ασκώντας τη μισή δύναμη.



2. Ασκώντας μεγαλύτερη δύναμη θα ανυψωθεί το βάρος και οι τροχαλίες θα περιστραφούν όπως δείχνει το σχήμα.

Το σημείο Γ έχει μηδενική επιτρόχιο επιτάχυνση ως εν επαφή με το ακίνητο σχοινί.

Άρα:

$$a = a_\varepsilon = a_\gamma \cdot R$$

Όπου a_γ η γωνιακή επιτάχυνση της κινητής τροχαλίας.

Το σημείο Δ επομένως έχει επιτάχυνση

$$a + a_\varepsilon = 2a = 2 \cdot a_\gamma \cdot R$$

Επειδή το σχοινί είναι μη εκτατό το χέρι έχει ίδια επιτάχυνση με το σημείο Δ. Επομένως:

$$a_{\chi\epsilon\rho} = 2a = 2 \cdot a_\gamma \cdot R$$

Λόγω του ότι δεν παρατηρείται ολίσθηση μεταξύ σχοινιού και ακίνητης τροχαλίας θα έχουμε για την

γωνιακή της επιτάχυνση :

$$a_\gamma' = \frac{a_{\chi\epsilon\rho}}{R} = \frac{2a}{R} = 2 \cdot a_\gamma$$

3. Για το σύστημα κινητή τροχαλία-σώμα έχουμε:

$$T_1 + T_2 - (M + m)g = (M + m)a \quad (1)$$

Για την κινητή τροχαλία:

$$\sum \tau = I \cdot a_\gamma' \Rightarrow T_2 R - T_1 R = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R}$$

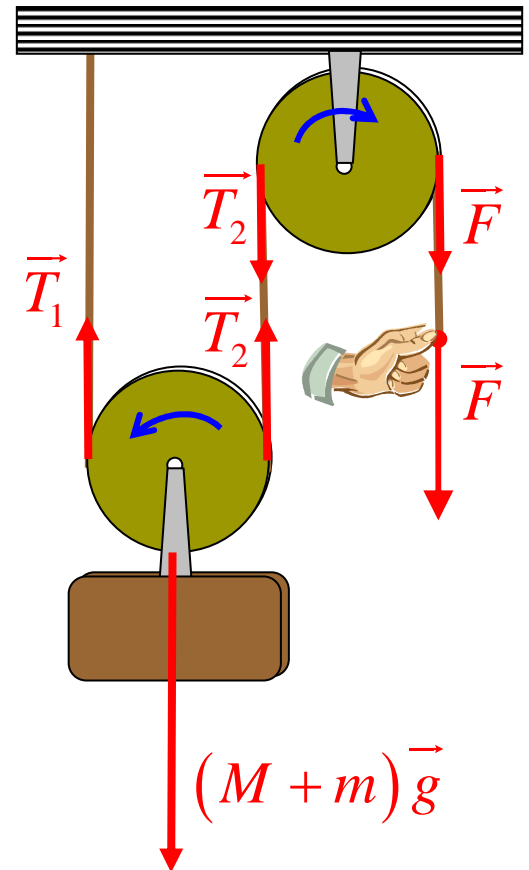
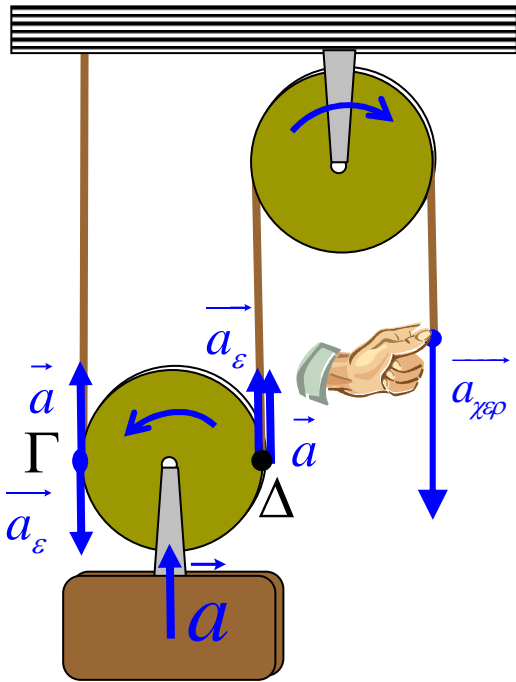
$$\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{m}{2} a \quad (2)$$

Για την ακίνητη:

$$\sum \tau = I \cdot a_\gamma' \Rightarrow F \cdot R - T_2 R = \frac{mR^2}{2} \frac{2a}{R}$$

$$\Rightarrow F - T_2 = ma \quad (3)$$

Θα λύσουμε το σύστημα των (1), (2), (3).



Αυτές γράφονται:

$$T_1 + T_2 - (M + m)g = (M + m)a \quad (4)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{m}{2}a \quad (5)$$

$$2F - 2T_2 = 2ma \quad (6)$$

Προσθέτοντας τις (4), (5), (6) έχουμε:

$$2F - (M + m)g = \left(M + 3m + \frac{m}{2} \right)a \quad (7)$$

Από αυτήν υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κρεμασμένου σώματος:

$$a = 1 \frac{m}{s^2}.$$

Για το χέρι τώρα:

$$a_{\chi\epsilon\rho} = 2a = 2 \frac{m}{s^2}.$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της κινητής τροχαλίας είναι:

$$a_\gamma = \frac{a}{R} = \frac{1}{0,2} \frac{rad}{s^2} = 5 \frac{rad}{s^2}$$

ενώ της ακίνητης:

$$a'_\gamma = 2 \cdot a_\gamma = 10 \frac{rad}{s^2}.$$

4. Όταν το σώμα έχει ανέβει $h = 0,5 \text{ m}$, το χέρι έχει κατεβεί 1 m διότι έχοντας διπλάσια επιτάχυνση έχει και διπλάσια μετατόπιση. Έχει προσφέρει έργο:

$$W = F \cdot 2h = 30N \cdot 1m = 30J$$

Από αυτά $(M + m)g \cdot h = 25J$ αύξησαν την δυναμική ενέργεια του συστήματος κρεμασμένο σώμα –τροχαλία και $5J$ μετετρέπησαν σε κινητική ενέργεια περιστροφής των δύο τροχαλιών και μεταφορική κινητική ενέργεια του συστήματος κρεμασμένο σώμα –τροχαλία.

Για τον ρυθμό παραγωγής έργου από το χέρι:

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 0,5 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = 1s \quad \text{και} \quad \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx_{\chi\epsilon\rho}}{dt} = F \cdot v_{\chi\epsilon\rho} = F \cdot a_{\chi\epsilon\rho} \cdot t = 60Watt$$