

Αλγεβρα

ΘΕΜΑ Α

A1) Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

Αν S το άθροισμα και P το γινόμενο των x_1, x_2 , να δειχθεί ότι:

α) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ (Μονάδες 08)

β) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (Μονάδες 07)

A1. Να αποδειχθεί ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 15)

A2. Να σημειώσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\theta > 0$, τότε ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \Leftrightarrow x \in (-\theta, \theta)$

β) $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0)$

γ) Αν $\alpha^2 = \alpha \cdot \beta$ τότε $(\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = 0)$

δ) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ τότε $\alpha > \beta$

ε) Υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4$$

B1) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$ (Μονάδες 12)

B2) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις $2x$ και y .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$ (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ Β

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

B1) Να αποδείξετε ότι:

$$x \leq \frac{3}{2}$$

(Μονάδες 12)

B2) Αν

$$x \leq \frac{3}{2}$$

να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x| \text{ είναι ανεξάρτητη του } x. \quad (\text{Μονάδες } 13)$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει:

$$B1) \quad \text{Να αποδείξετε ότι:} \quad y \in (1, 3) \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

B2) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β (τράπεζα, 2_3852)

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \text{ και } -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

$$B1) \quad \alpha - 2\beta \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

$$B2) \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta \quad (\text{Μονάδες } 13)$$

ΘΕΜΑ Β

$$B1) \text{ Να λύσετε την εξίσωση: } 2x^2 - x - 6 = 0 \quad (1) \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

$$B2) \text{ Να λύσετε την ανίσωση: } |x - 1| < 2 \quad (2) \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

B3) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1) \quad \text{Να λύσετε την ανίσωση: } 2x^2 - 3x - 2 < 0 \quad (1) \quad (\text{Μονάδες } 06)$$

$\Gamma 2)$ Να εξετάσετε αν οι αριθμοί

$$-\frac{1}{2018}, \quad -\frac{7}{15}, \quad \alpha^2 + \beta^2, \quad \frac{\alpha + \beta}{\beta}, \quad \text{με } -1 < \alpha < \beta < 0$$

είναι λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 06)

$\Gamma 2)$ Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = 2\left(\frac{7}{15}\right)^2 + 3\frac{7}{15} - 2$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 06)

$\gamma)$ Αν $\lambda \in (-2, 2)$, τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = 2\lambda^2 - 3|\lambda| - 2. \text{ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.} \quad (\text{Μονάδες } 07)$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1) \quad \text{Να λύσετε την ανίσωση: } 2x^2 - 3x - 2 < 0 \quad (1) \quad (\text{Μονάδες } 06)$$

$\Gamma 2)$ α) Να αποδείξετε ότι:

$$-\frac{1}{2} < -\frac{7}{15} < 2$$

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = 2 \left(\frac{7}{15} \right)^2 + 3 \frac{7}{15} - 2$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 06)

γ) Αν $\lambda \in (-2, 2)$, τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$\Lambda = 2\lambda^2 - 3|\lambda| - 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Γ (τράπεζα, 4_6227)

Γ1) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$ (Μονάδες 06)

Γ2) α) Να αποδείξετε ότι:

$$-1 < \frac{46}{47} < 6$$

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = \left(-\frac{46}{47} \right)^2 + 5 \frac{46}{47} - 6$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 06)

γ) Αν $a \in (-6, 6)$, τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Δ (τράπεζα, 4_1963)

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$
και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

Δ1) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 08)

Δ2) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 08)

Δ3) Αν $\lambda \neq 2$ και x, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \quad (\text{Μονάδες 09})$$

ΘΕΜΑ Δ (τράπεζα, 4_4815)

Δίνεται συνάρτηση

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + kx + \lambda}, \text{ η οποία έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Δ1) Να βρείτε τις τιμές των k και λ . (Μονάδες 09)

Δ2) Για $k = 1$ και $\lambda = -2$:

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

(Μονάδες 09)

β) Να δείξετε ότι: $g(a + 3) > g(a)$ όταν $-1 < a < 2$

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

(Μονάδες 10)

Δ2) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 07)

Δ3) Αν $a \in (-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = a^2 - 5|a| - 6.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)