

Αλγεβρα

ΘΕΜΑ Α

A1) Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

Αν S το άθροισμα και P το γινόμενο των x_1, x_2 , να δειχθεί ότι:

α) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ (Μονάδες 08)

β) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (Μονάδες 07)

A1. Να αποδειχθεί ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 15)

A2. Να σημειώσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\theta > 0$, τότε ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \Leftrightarrow x \in (-\theta, \theta)$

β) $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0)$

γ) Αν $\alpha^2 = \alpha \cdot \beta$ τότε $(\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = 0)$

δ) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ τότε $\alpha > \beta$

ε) Υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$

(Μονάδες 10)

α) Ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ και } \beta = 0)$

β) Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $B(-\alpha, \beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

γ) Η εξίσωση $y = ax + \beta$ με $a > 0$ παριστάνει μία ευθεία που σχηματίζει με το άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

γ) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

ε) Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{-\beta}{\alpha}$$

1) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

2) $|x| < \rho, \rho > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$

3) Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ισχύει: αν $\Delta = 0$ τότε αυτό είναι ομόσημο του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4$$

B1) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$ (Μονάδες 12)

B2) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις $2x$ και y .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$ (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.
(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ Β

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

B1) Να αποδείξετε ότι:

$$x \leq \frac{3}{2}$$

(Μονάδες 12)

B2) Αν

$$x \leq \frac{3}{2}$$

να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$

B1) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

B2) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β (τράπεζα, 2_3852)

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \text{ και } -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

B1) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

B2) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

B1) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(15 μον.)

B2) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.
(10 μον.)

ΘΕΜΑ Β

Β1) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 09)

Β2) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2) (Μονάδες 09)

Β3) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Να λύσετε την ανίσωση: $2x^2 - 3x - 2 < 0$ (1) (Μονάδες 06)

Γ2) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί

$$-\frac{1}{2018}, \quad -\frac{7}{15}, \quad \alpha^2 + \beta^2, \quad \frac{\alpha + \beta}{\beta}, \quad \text{με } -1 < \alpha < \beta < 0$$

είναι λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 06)

Γ2) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = 2\left(\frac{7}{15}\right)^2 + 3\frac{7}{15} - 2$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 06)

γ) Αν $\lambda \in (-2, 2)$, τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$A = 2\lambda^2 - 3|\lambda| - 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Να λύσετε την ανίσωση: $2x^2 - 3x - 2 < 0$ (1) (Μονάδες 06)

Γ2) α) Να αποδείξετε ότι:

$$-\frac{1}{2} < -\frac{7}{15} < 2$$

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = 2\left(\frac{7}{15}\right)^2 + 3\frac{7}{15} - 2$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 06)

γ) Αν $\lambda \in (-2, 2)$, τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$A = 2\lambda^2 - 3|\lambda| - 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Γ (τράπεζα, 4_6227)

Γ1) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$ (Μονάδες 06)

Γ2) α) Να αποδείξετε ότι:

$$-1 < -\frac{46}{47} < 6$$

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 06)

γ) Αν $a \in (-6, 6)$, τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Δ (τράπεζα, 4_1963)

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

Δ1) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 08)

Δ2) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 08)

Δ3) Αν $\lambda \neq 2$ και x, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \quad (\text{Μονάδες 09})$$

ΘΕΜΑ Δ (τράπεζα, 4_4815)

Δίνεται συνάρτηση

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + kx + \lambda}, \text{ η οποία έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Δ1) Να βρείτε τις τιμές των k και λ . (Μονάδες 09)

Δ2) Για $k = 1$ και $\lambda = -2$:

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g . (Μονάδες 09)

β) Να δείξετε ότι: $g(a + 3) > g(a)$ όταν $-1 < a < 2$ (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

Δ1) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x' (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα x' που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h που η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του άξονα x' (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - a + 2$ και $g(x) = x^2 - a + 3$ με $a \in \mathbb{R}$

Δ1) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a . (Μονάδες 07)

Δ2) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 04

ii) Για την τιμή του a που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 04

Δ3) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

(Μονάδες 10)

Δ2) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 07)

Δ3) Αν $a \in (-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = a^2 - 5|a| - 6.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)