Αλγεβρα

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.
Αν S το άθροισμα και P το γινόμενο των x_1, x_2, να δειχθεί ότι:

α) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ (Μονάδες 08)

β) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (Μονάδες 07)

Α2. Να σημειώσετε με Σ (σωστό) η Λ(λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\theta > 0$, τότε ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \Leftrightarrow x \in (-\theta, \theta)$

β) $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0)$

γ) Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $B(-\alpha, \beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

δ) Η εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$ παριστάνει μία ευθεία που σχηματίζει με το άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

ε) Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, ισχύει: αν Δ=0 τότε αυτό είναι ομόσημο του α για κάθε $x \in R$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$$|x-3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y-6| \leq 4$$

Β1) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$ (Μονάδες 12)

Β2) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 2x και y.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Να λύσετε την ανίσωση: $2x^2 - 3x - 2 < 0 \quad (1)$ (Μονάδες 10)

Γ2) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί

$$\frac{1}{2018} \quad , \quad -\frac{8}{15} \quad , \quad \alpha^2+\beta^2 \quad , \quad \mu\varepsilon\ -1<\alpha<\beta<0$$

είναι λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 02+02+ 04)

Γ3) $Αν\ \lambda \in (-2\ ,2)$, τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = 2\lambda^2 - 3|\lambda| - 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 \quad και \quad g(x) = \lambda x + (1-\lambda)\ ,\ x \in R$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

Δ1) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων $C_f \quad και \quad C_g$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$. (Μονάδες 04)

Δ2) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις $C_f \quad και \quad C_g$ έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 07)

Δ3) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι $C_f \quad και \quad C_g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 07)

Δ4) Αν $\lambda \neq 2 \quad και \quad x_1\ ,x_2$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των $C_f \quad και \quad C_g$, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει:

$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$ (Μονάδες 07)