§ 3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$

(1) Τι ονομάζουμε εξίσωση 1ου βαθμού;

Εξίσωση 1ου βαθμού (ή **πρωτοβάθμια εξίσωση**) με άγνωστο x ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta=0$.

(2) Τι ονομάζεται **ρίζα ή λύση** της **εξίσωσης** 1ου βαθμού;

Ρίζα ή λύση της εξίσωσης ονομάζεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει.

(3) Τι ονομάζουμε συντελεστές στην εξίσωση $\alpha x+\beta=0$;

Συντελεστές τις εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ ονομάζονται τα α και β.

(4) Τι ονομάζουμε όρους της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$;

Όροι της **εξίσωσης** $\alpha x+\beta=0$ ονομάζονται τα μονώνυμα αx και β.

(5) Ποιος είναι ο άγνωστος και ποιος ο γνωστός όρος της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$;

Άγνωστος όρος της **εξίσωσης** $\alpha x+\beta=0$ είναι ο όρος αx.

Γνωστός όρος της **εξίσωσης** $\alpha x+\beta=0$ είναι ο όρος β.

(6) Τι ονομάζουμε παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού;

Παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού ονομάζεται η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ της οποίας ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές της εκφράζεται με τη βοήθεια γραμμάτων.

(7) Τι ονομάζεται παράμετρος σε μια παραμετρική εξίσωση;

Παράμετρος ονομάζεται το γράμμα με το οποίο εκφράζονται οι συντελεστές της εξίσωσης.

(7) Τι ονομάζεται διερεύνηση παραμετρικής εξίσωσης;

Διερεύνηση παραμετρικής εξίσωσης ονομάζεται η εργασία που κάνουμε για να βρούμε της ρίζες της.

(8) Συνοψίστε σε ένα πίνακα την διερεύνηση της εξίσωσης 1ου βαθμού

Πίνακας διερεύνησης της εξίσωσης α' βαθμού ($\alpha x+\beta=0$)
1. Αν $\alpha\neq 0$ η εξίσωση έχει τη λύση $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.
2. Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
3. Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ η εξίσωση είναι αόριστη (ταυτότητα).

(9) Τι σημαίνει ότι η εξίσωση είναι αδύνατη;

Αδύνατη εξίσωση σημαίνει ότι δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός που να είναι ρίζα της.

(10) Τι σημαίνει ότι η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα;
Αόριστη ή **ταυτότητα** σημαίνει ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι ρίζες της.

<u>Παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων 1ου βαθμού</u>
Μεθοδολογία
Για την επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Αν υπάρχουν παρενθέσεις και παρονομαστές απαλείφουμε πρώτα τις παρενθέσεις
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές
- Απαλείφουμε τις παρενθέσεις
- Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
- Αν ο συντελεστής του άγνωστου όρου είναι διάφορος του μηδενός διαιρούμε και τα δύο της μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου.

(1) Να επιλυθεί η εξίσωση: $4(x-5)=x-5$

<u>Λύση:</u>

$$4(x-5)=x-5$$
$$4x-20=x-5$$
$$4x-x=-5+20$$
$$3x=15$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{15}{3}$$
$$x=5$$

(2) Να επιλυθεί η εξίσωση: $\frac{x-4}{2}=\frac{7x}{2}-3x-5$

<u>Λύση:</u>

$$\frac{x-4}{2}=\frac{7x}{2}-3x-5 \Leftrightarrow$$
$$2\frac{x-4}{2}=2\frac{7x}{2}-6x-10 \Leftrightarrow$$
$$x-4=7x-6x-10 \Leftrightarrow$$
$$x-7x+6x=4-10 \Leftrightarrow$$
$$0x=-6$$

Αδύνατη

(3) Να επιλυθεί η εξίσωση: $\frac{8x}{3}+4=\frac{5x+12}{3}+x$

<u>Λύση:</u>

$$\frac{8x}{3}+4=\frac{5x+12}{3}+x \Leftrightarrow$$

$3\frac{8x}{3}+12=3\frac{5x+12}{3}+3x \Leftrightarrow$

$8x+12=5x+12-3x \Leftrightarrow$

$8x-5x+3x=12-12 \Leftrightarrow$

Αόριστη

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Παραδείγματα επίλυσης ρητών ή κλασματικών εξισώσεων που ανάγονται σε επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού.

Μεθοδολογία

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών
- Λύνουμε την εξίσωση ΕΚΠ=0, της ρίζες της οποίας εξαιρούμε από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για αυτό το νέο σύνολο ορίζεται η εξίσωση.
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές
- Απαλείφουμε τις παρενθέσεις
- Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
- Αν ο συντελεστής του άγνωστου όρου είναι διάφορος του μηδενός διαιρούμε και τα δύο της μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου.
- Εξαιρούμε τις ρίζες που δεν ανήκουν στο σύνολο που ορίζεται η εξίσωση.

(1) Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{3x-2x^2}=\frac{5}{x}$.

Λύση:

$\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{3x-2x^2}=\frac{5}{x} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{x(3-2x)}=\frac{5}{x} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{x(2x-3)}=\frac{5}{x} \Leftrightarrow$ (Πρέπει $x(2x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq \frac{3}{2}$)

$x(2x-3)\frac{1}{2x-3}-x(2x-3)\frac{3}{x(2x-3)}=x(2x-3)\frac{5}{x} \Leftrightarrow$

$x-3=5(2x-3) \Leftrightarrow$

$x-3=10x-15 \Leftrightarrow$

$x-10x=3-15 \Leftrightarrow$

$-9x=-12 \Leftrightarrow$

$x=\frac{12}{9} \Leftrightarrow$

$x=\frac{4}{3}$.

(2) Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{3}{4-2x}+\frac{30}{8(1-x)}=\frac{3}{2-x}+\frac{5}{2-2x}$.

<u>Λύση:</u>

$\frac{3}{4-2x}+\frac{30}{8(1-x)}=\frac{3}{2-x}+\frac{5}{2-2x} \Leftrightarrow$

$\frac{3}{2(2-x)}+\frac{30}{8(1-x)}=\frac{3}{2-x}+\frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow$ (Πρέπει $8(1-x)(2-x)\neq 0$)

$8(2-x)(1-x)\frac{3}{2(2-x)}+8(2-x)(1-x)\frac{30}{8(1-x)}=$

$=8(2-x)(1-x)\frac{3}{2-x}+8(2-x)(1-x)\frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow$

$12(1-x)+30(2-x)=24(1-x)+20(2-x) \Leftrightarrow$

$12-12x+60-30x=24-24x+40-20x \Leftrightarrow$

$-12x-30x+24x+20x=-12-60+24+40 \Leftrightarrow$

$2x=-8 \Leftrightarrow$

$x=-4$

<u>Παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές της μεταβλητής και ανάγονται σε επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού.</u>

Μεθοδολογία

Οι εξισώσεις αυτής της κατηγορίας έχουν ή μπορούν να πάρουν μια από τις παρακάτω μορφές:

(Α) $|A(x)|=\kappa$, όπου $A(x)$ αλγεβρική παράσταση με μεταβλητή το x και $\kappa\in\mathbb{R}$.

- Αν $\kappa>0$, έχουμε $|A(x)|=\kappa \Leftrightarrow A(x)=\kappa$ ή $A(x)=-\kappa$
- Αν $\kappa=0$, έχουμε $|A(x)|=0 \Leftrightarrow A(x)=0$
- Αν $\kappa<0$, η εξίσωση είναι αδύνατη

(Β) $|A(x)|=|B(x)|$, όπου $A(x)$, $B(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις με μεταβλητή το x

$$|A(x)|=|B(x)| \Leftrightarrow A(x)=B(x) \text{ ή } A(x)=-B(x)$$

(Γ) $|A(x)|=B(x)$, όπου $A(x)$, $B(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις με μεταβλητή το x

- Αν $B(x)\geq 0$, τότε $A(x)=B(x)$ ή $A(x)=-B(x)$
- Αν $B(x)\geq 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

(1) Να επιλυθεί η εξίσωση: $|2x-1|=|x+3|$

<u>Λύση:</u>

$|2x-1|=|x+3| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1=x+3 \Leftrightarrow$ ή $2x-1=-(x+3)$

Όμως

Όμως

$2x-1=x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-x=3+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4$

$2x-1=-(x+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1=-x-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+x=-3+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

(2) Να επιλυθεί η εξίσωση: $|2x-3|=3x-2$

<u>Λύση:</u>

$|2x-3|=3x-2$

Πρέπει $3x-2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x\geq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{3}\geq\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{2}{3}$

Με τον παραπάνω περιορισμό έχουμε:

$|2x-3|=3x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-3=3x-2 \Leftrightarrow$ ή $2x-3=-(3x-2)$

Όμως

$2x-3=3x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-3x=-2+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1$

$2x-3=-(3x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-3=-3x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+3x=2+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{5}=\frac{5}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x=1$, διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό $x\geq\frac{2}{3}$.

<u>*Παραδείγματα επίλυσης παραμετρικών εξισώσεων 1ου βαθμού*</u>

Μεθοδολογία:

- Κάνουμε πράξεις και φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $Ax=B$
- Παραγοντοποιούμε τους συντελεστές Α και Β.
- Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $A=0$.
- Για τις τιμές της παραμέτρου που βρίσκουμε διερευνούμε την παραμετρική εξίσωση δηλαδή:

- ✓ Για τις τιμές της παραμέτρου που είναι $A \neq 0$ η παραμετρική εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{B}{A}$
- ✓ Την κάθε μια από τις ρίζες της $A = 0$ λύνουμε την παραμετρική εξίσωση η οποία σ' αυτή την περίπτωση είναι αόριστη ή αδύνατη.

(1) Να επιλυθεί η εξίσωση $\mu x + 8x = 2(\mu - 1)x + 10$.

Λύση:

$\mu x + 8x = 2(\mu - 1)x + 10 \Leftrightarrow$

$\mu x + 8x = 2\mu x - 2x + 10 \Leftrightarrow$

$\mu x + 8x - 2\mu x + 2x = 10 \Leftrightarrow$

$10x - \mu x = 10 \Leftrightarrow$

$(10 - \mu)x = 10.$

$10 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 10$

Αν $\mu \neq 10$ τότε $x = \frac{10}{10 - \mu}$

Αν $\mu = 10$ τότε $0x = 10$ (αδύνατη)

(2) Να επιλυθεί η εξίσωση $\mu^2(x - 2) - 3\mu = x + 1$.

Λύση:

$\mu^2(x - 2) - 3\mu = x + 1 \Leftrightarrow$

$\mu^2 x - 2\mu^2 - 3\mu = x + 1 \Leftrightarrow$

$\mu^2 x - x = 2\mu^2 + 3\mu + 1 \Leftrightarrow$

$(\mu^2 - 1)x = 2\left(\mu + \frac{1}{2}\right)(\mu + 1) \Leftrightarrow$

$(\mu - 1)(\mu + 1)x = (2\mu + 1)(\mu + 1).$

$(\mu - 1)(\mu + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\mu - 1 = 0$ ή $\mu + 1 = 0$

$\mu = 1$ ή $\mu = -1$

Αν $\mu \neq 1$ και $\mu \neq -1$ τότε $x = \frac{(2\mu + 1)(\mu + 1)}{(\mu - 1)(\mu + 1)}$.

Αν $\mu = 1$ τότε $0x = 6$ (αδύνατη)

Αν $\mu = -1$ τότε $0x = 0$ (αόριστη)

Παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων που δεν είναι 1ου βαθμού

Μεθοδολογία:

- ➢ Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος
- ➢ Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος
- ➢ Χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

- Χρήσιμη και η ισοδυναμία $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$ σε περίπτωση που δεν παραγοντοποιείται το πρώτο μέλος

(1) Να επιλύσετε την εξίσωση: $x^2(x-5)-2x(x-5)+x-5=0$

<u>Λύση:</u>

$x^2(x-5)-2x(x-5)+x-5=0 \Leftrightarrow$

$(x-5)(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-5)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$x-5=0$ ή $(x-1)^2=0$

$x=5$ ή $x-1=0$

$x=1$

(2) Να επιλύσετε την εξίσωση: $(x+1)^2=-(x+1)(x+5)$

<u>Λύση:</u>

$(x+1)^2=-(x+1)(x+5) \Leftrightarrow$

$(x+1)^2+(x+1)(x+5)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x+1+x+5)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(2x+6)=0 \Leftrightarrow$

$2(x+1)(x+3)=0 \Leftrightarrow$

$x+1=0$ ή $x+3=0$

$x=-1$ ή $x=-3$

<u>*Προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού*</u>

Μεθοδολογία:

- Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με χρήση εξίσωσης 1ου βαθμού, θέτουμε με x την άγνωστη ποσότητα και κατασκευάζουμε την εξίσωση που προκύπτει από τα δεδομένα της άσκησης.

(1) Μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις βάσεις $12\ \text{m}$ και $8\ \text{m}$. Αν περιέχει 144.000 λίτρα νερό, να βρείτε το ύψος της στάθμης του νερού.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε:

$12\ \text{m}=120\ \text{dm}$

$8\ \text{m}=80\ \text{dm}$

$144.000\ \text{lt}=144.000\ \text{dm}^2$

Έστω $x\ \text{dm}$ το ύψος της στάθμης του νερού. Τότε:

$120\cdot 80\cdot x=144.000 \Leftrightarrow$

$9.600x=144.000 \Leftrightarrow$

$\frac{9.600x}{9.600}=\frac{144.000}{9.600}\Leftrightarrow$

$x=15\text{ dm}$ ή $1,5\text{ m}$

Ερωτήσεις κατανόησης

Να εξετάσετε αν είναι αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ) οι παρακάτω ισχυρισμοί.

(α) Οι εξισώσεις $x=x$ και $\frac{x}{x}=1$ είναι ισοδύναμες

(β) Αν $\alpha\neq 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει ακριβώς μία λύση.

(γ) Η εξίσωση $|x|+3=0$ είναι αδύνατη

(δ) Η εξίσωση $\lambda x=0$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ

(ε) Η εξίσωση $|x|=-|x|$ είναι αδύνατη

(στ) Η εξίσωση $|x|+3=|x+3|$ είναι ταυτότητα

(ζ) Αν $\beta=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ ή είναι αδύνατη ή έχει ακριβώς μία λύση

(η) Αν $\alpha=\beta=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(θ) Αν $\theta>0$ και $|x|=\theta$, τότε $x=\theta$ ή $x=-\theta$

(ι) Αν $|x|=|\alpha|$, όπου $\alpha<0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

(ια) Η εξίσωση $4x+1=4x+1$ είναι ταυτότητα

(ιβ) Η εξίσωση $(\kappa+1)x=\kappa$ είναι παραμετρική

(ιγ) Η εξίσωση $(\lambda+1)x=\lambda$ είναι αδύνατη όταν $\lambda=-1$

(ιδ) Η εξίσωση $(\mu^2+1)x=\mu$ είναι αδύνατη

(ιε) Η εξίσωση $4x^3-4x^2+x-1=0$ έχει λύση το $x=1$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

   i. $5(x-3)+10(2-5x)+10x=-(15+10x)$

   ii. $9(8-x)-10(9-x)-4(x-1)=1-8x$

   iii. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{3x-5}{2}$

   iv. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-3}{4}+\frac{8}{3}=0$

   v. $\frac{5x-3}{2}-\frac{3y}{4}=y-5$

   vi. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14$

   vii. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

viii. $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}$

ix. $\frac{1}{6}(8-x)+\frac{2}{3}(x-1)=\frac{1}{2}(x+6)-\frac{x}{3}$

x. $2x-\frac{1}{2}(19-2x)=\frac{1}{2}(2x-11)$

2. Να λυθούν και να διερευνηθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3$

ii. $\frac{2x+1}{3x-3}=\frac{7x-1}{6x+6}-\frac{2x^2-3x-45}{4x^2-4}$

iii. $\frac{3+x}{x-4}+\frac{2-x}{2x-8}+\frac{2x-1}{3x-12}=\frac{5}{6}$

iv. $\frac{7x+8}{21}-\frac{x+4}{8x-11}=\frac{x}{3}$

v. $\frac{2x-3}{2x-4}-6=\frac{x-5}{3(x-2)}-\frac{11}{2}$

vi. $\frac{7x+16}{21}-\frac{x+8}{4x+10}=\frac{23}{70}+\frac{x}{3}$

vii. $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$

viii. $\frac{2x-13}{2x-16}+\frac{2(x-6)}{x-8}=\frac{7}{8}+\frac{10x-78}{3x-24}$

ix. $\frac{x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-8}{x-6}-\frac{x-9}{x-7}$

x. $\frac{x+5}{x+4}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-15}{x-16}$

xi. $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}$

xii. $\frac{2+2x}{9x^2-4}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}=\frac{x+4}{9x^2-4}$

xiii. $\frac{3}{x-2}-\frac{4}{5x-15}=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$

xiv. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$

xv. $\frac{1}{3x-1}+\frac{2(x+1)}{x-1}-\frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1}=1$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $|3x-1|=4$

ii. $|2x+1|=0$

iii. $|1-3x|=5$

iv. $|x+1|=-2$

v. $|4x-3|+7=0$

vi. $2|x|=12$

vii. $3|1-x|=12$

viii. $2|3x-1|+2=8$

ix. $2\left(|x-5|-3\right)=4$

x. $3|2x-3|-4=|2x-3|+8$

xi. $3-2|x+3|=3|x+3|-12$

xii. $2|2x-3|+1=7-4|3-2x|$

xiii. $|x-2|=3x-1$

xiv. $|2x-1|=x-2$

xv. $3|2x-1|=x+1$

xvi. $2|1-2x|=3-4x$

xvii. $|x-1|=|x-3|$

xviii. $|x-2|=2|x+1|$

xix. $\frac{|x|+2}{3}-\frac{|x|+4}{5}=-\frac{4}{15}$

xx. $|x-2|=\sqrt{x^2+4x+4}$

xxi. $\left|-\frac{x}{4}+4\right|=x-1$

xxii. $\frac{2|x|+3}{5}+\frac{|x|}{2}=\frac{3}{2}$

xxiii. $\left|\frac{7x-2}{x+4}\right|=2$

xxiv. $\frac{|x-2|+3}{3}-\frac{|3x-6|-2}{9}=\frac{|2-x|-1}{18}+1$

xxv. $|4|x|-5|=7$

xxvi. $\frac{|x-2|}{3}-\frac{1}{2}=\frac{|6-3x|-2}{4}$

xxvii. $|3-|x-1||=2$

xxviii. $(x-4)^2+|x^2-16|=0$

xxix. $||x|+2|=2x$

xxx. $\dfrac{|x-1|+|3x|}{|x|-x}=3$

4. Να λυθούν και να διερευνηθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
    i. $\alpha x+\alpha+1=x$
    ii. $4\alpha^2 x-1=x+2\alpha$
    iii. $2\alpha x+1=4\alpha^2+x$
    iv. $\mu x+8x=2(\mu-1)x+10$
    v. $(\mu-2)x+\mu=7$
    vi. $(x-1)+40\mu x-5\mu=0$
    vii. $\mu^2(x-2)-3\mu=x+1$
    viii. $(\mu^2-4)x=\mu^2-2\mu$

5. Να βρεθεί ένας αριθμός, του οποίου το διπλάσιο αυξημένο κατά 15, είναι ίσο με το τριπλάσιο του ελαττωμένο κατά 9.

6. Το άθροισμα των ηλικιών τριών προσώπων είναι 86 έτη. Να βρεθεί η ηλικία του καθενός, αν γνωρίζουμε, ότι ο δεύτερος έχει διπλάσια ηλικία από τον πρώτο και ότι ο τρίτος είναι 14 χρόνια μικρότερος από τον δεύτερο.

7. Τρία πρόσωπα Α, Β, Γ μοιράστηκαν ένα ποσό. Ο Α πήρε το $\frac{1}{5}$ αυτού και 100 € ακόμη, ο Β πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 90 € ακόμη και ο Γ πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 70 € ακόμη. Να βρεθεί το ποσό που μοιράστηκαν και τι πήρε ο καθένας.

8. Ένας χώρισε ένα κεφάλαιο 48.000 € σε δυο μέρη και τόκισε το πρώτο μέρος με επιτόκιο 6% και το δεύτερο με επιτόκιο 4%. Ο ετήσιος τόκος που έλαβε από τα δύο κεφάλαια είναι όσος θα έπαιρνε αν τόκιζε όλο το κεφάλαιο προς 5,5%. Να βρεθούν τα δύο μέρη του κεφαλαίου.

9. Δύο ποδηλάτες Α και Β φεύγουν ταυτόχρονα από δύο πόλεις Σ και Θ, οι οποίες απέχουν 195 χιλιόμετρα και κατευθύνονται προς συνάντηση. Η ταχύτητα του Β είναι κατά 3 χιλιόμετρα μικρότερη των $\frac{9}{10}$ της ταχύτητας του Α. Οι ποδηλάτες συναντήθηκαν μετά 6 ώρες από την αναχώρηση τους. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των ποδηλάτων, αν γνωρίζουμε, ότι ο Β σταμάτησε στην διαδρομή για μια ώρα.

§ 3.2 Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Για την λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$ αρκεί να γνωρίζετε τον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα:

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Αναφερόμαστε μόνο σε ν-οστές ρίζες μη αρνητικών αριθμών. Έτσι, παρ' ότι για παράδειγμα είναι $(-2)^3 = -8$ **<u>δεν γράφουμε</u>** ότι $\sqrt[3]{-8} = -2$

ν	α	x
	0	0
Άρτιος	+	$\pm\sqrt[\nu]{\alpha}$
Άρτιος	-	Αδύνατη
Περιττός	+	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
Περιττός	-	$-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

<u>Παράδειγμα επίλυσης εξισώσεων της μορφής</u> $x^\nu = \alpha$

1. Να επιλυθεί η εξίσωση $x^4 + 37x = 0$

<u>Λύση:</u>

$x^4 + 37x = 0$

$x(x^3 + 27) = 0$

$x = 0$ ή $x^3 + 27 = 0$

$x^3 = -27$

$x = -\sqrt[3]{\lvert -27\rvert}$

$x = -\sqrt[3]{27}$

$x = -3$

2. Να επιλυθεί η εξίσωση $\lambda x^3 = \lambda^2$, για τις διάφορες τιμές του λ.

<u>Λύση:</u>

Αν $\lambda \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $x^3 = \lambda$

Επομένως

- όταν $\lambda \geq 0$ τότε $x = \sqrt[3]{\lambda}$
- όταν $\lambda < 0$ τότε $x = -\sqrt[3]{\lvert\lambda\rvert}$

Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση είναι ταυτότητα.

<u>Ασκήσεις</u>

1. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $x^5 = 0$ (β) $x^{10} = 0$ (γ) $x^{40} = 1$

(δ)	$x^{99}=1$	(ε)	$x^{11}=-1$	(στ)	$x^{20}=-1$
(ζ)	$x^{5}=2$	(η)	$x^{4}=4$	(θ)	$x^{3}=-13$
(ι)	$x^{6}=-8$	(ια)	$32x^{5}-1=0$	(ιβ)	$16x^{4}-81=0$
(ιγ)	$27x^{3}+8=0$	(ιδ)	$256x^{8}+1=0$	(ιε)	$(x+2)^{6}-8(x+2)^{3}=0$

2. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α)	$7x^{7}-7x^{3}=0$	(β)	$x^{10}=32x^{5}$	(γ)	$81x^{8}-16x^{4}=0$
(δ)	$64x^{9}+27x^{3}=0$	(ε)	$(\lvert x-1\rvert-4)^{3}=27$	(στ)	$x^{3}(x^{3}+30)=3x^{3}$
(ζ)	$\sqrt[5]{(x-1)^{3}}=8$	(η)	$\sqrt[3]{x}=2\sqrt[4]{x}$	(θ)	$(\lvert 3-x\rvert-5)^{4}-16=0$
(ι)	$\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{4}=1$	(ια)	$\lambda x^{4}=\lambda^{2}$	(ιβ)	$\alpha x^{3}=1$

§ 2.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

☑ **Η εξίσωση** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$

- Μια εξίσωση λέγεται **δευτέρου βαθμού** όταν είναι της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ με άγνωστο το x.
  Οι αριθμοί α , β , γ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης και μπορεί να είναι συγκεκριμένοι αριθμοί ή παράμετροι.
- **Ρίζα (λύση) της εξίσωσης** λέγεται ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση (δηλ ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, αν και μόνο αν $\alpha \rho^2 + \beta \rho + \gamma = 0$)

☑ **Επίλυση της εξίσωσης:** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$

- Η αλγεβρική παράσταση: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ λέγεται διακρίνουσα της εξίσωσης και το πρόσημό της καθορίζει το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.
  Ισχύουν:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	**Η εξίσωση** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0\ ,\ \alpha \neq 0$
Αν Δ > 0	**έχει δύο ρίζες άνισες , τις** $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Αν Δ = 0	**έχει μια διπλή ρίζα , την** $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$
Αν Δ < 0	**Δεν έχει πραγματικές ρίζες**

Παράδειγμα 1ο

Να λύσετε την εξίσωση : $2x^2 + 7x - 9 = 0$

Λύση

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 121 > 0$

Επειδή Δ >0 , η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες . Οι ρίζες είναι :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7+11}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-7-11}{4} = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Παράδειγμα 2ο

Να λύσετε την εξίσωση : $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Λύση

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

Επειδή Δ =0 , η εξίσωση έχει διπλή ρίζα . Η διπλή ρίζα είναι :

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 3ο

Να λύσετε την εξίσωση : $x^2+x+10=0$

Λύση

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = -39 < 0$

Επειδή $\Delta < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη και δεν έχει λύση .

☼ **Παρατήρηση 1 (Ελλιπείς εξισώσεις)**

Η χρησιμοποίηση της διακρίνουσας Δ , για τη λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης δεν μας συμφέρει όταν είναι β=0 ή γ = 0.

Παράδειγμα 4ο

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $5x^2=0$ **ii.** $2x^2-8=0$ **iii.** $2x^2+7=0$ **iv.** $x^2=4x$

Λύση

i. $5x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

ii. $2x^2-8=0 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

iii. $2x^2+7=0 \Leftrightarrow 2x^2=-7 \Leftrightarrow x^2=-\frac{7}{4}$ αδύνατη

iv. $x^2=4x \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \end{cases}$

☼ **Παρατήρηση 2**

Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ (1) είναι ετερόσημοι, τότε $\alpha\gamma<0$, που σημαίνει $-\alpha\gamma>0$, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο λύσεις άνισες.

Έτσι η εξίσωση $3x^2+10x-13=0$ έχει δύο άνισες ρίζες, αφού $\alpha\gamma=-39<0$.

☼ **Παρατήρηση 3**

Όταν η διακρίνουσα Δ είναι τέλειο τετράγωνο, δηλ $\Delta=A^2$, τότε για τις ρίζες της εξίσωσης θα γράφουμε $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm A}{2}$ αντί για

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm|A|}{2}$

Παράδειγμα 5ο

Να επιλυθεί η εξίσωση: $2x^2=\alpha(\alpha-x)$

Λύση:

Φέρνουμε την εξίσωση σε κανονική μορφή κάνοντας την επιμεριστική ιδιότητα, φέροντας στο πρώτο μέλος γνωστούς και αγνώστους, διατάσσοντας κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x τους όρους της εξίσωσης.

$2x^2 = \alpha(\alpha - x) \Rightarrow 2x^2 = \alpha^2 - \alpha x \Rightarrow 2x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$

Η εξίσωση είναι παραμετρική γιατί οι συντελεστές $\alpha = 2 \quad \beta = \alpha \quad \gamma = -\alpha^2$ περιέχουν την παράμετρο α

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \alpha^2 - 4\cdot 2\cdot(-\alpha^2) = \alpha^2 + 8\alpha^2 = 9\alpha^2$

Συνεπώς:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2}}{2\cdot 2} = \frac{-\alpha \pm 3\alpha}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-\alpha + 3\alpha}{4} = \dfrac{2\alpha}{4} = \dfrac{\alpha}{2} \\ \text{ή} \\ \rho_2 = \dfrac{-\alpha - 3\alpha}{4} = \dfrac{-4\alpha}{4} = -\alpha \end{cases}$$

Παράδειγμα 6ο

Να λύσετε την εξίσωση: $x^2\text{-}3kx - 10k^2 = 0$, $k \in R$

Λύση

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3k)^2 - 4\cdot 1\cdot(-10k^2) = 49k^2 = (7k)^2 \geq 0$

Επειδή $\Delta \geq 0$, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές. Οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3k) \pm \sqrt{49k^2}}{2\cdot 1} = \frac{3k \pm 7k}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3k + 7k}{2} = 5k \\ x_2 = \dfrac{3k - 7k}{2} = -2k \end{cases}$$

☼ **<u>Παρατήρηση 4</u>**

Η σημασία ορισμένων εκφράσεων σχετικά με την $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$.

Η έκφραση: Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$:

- έχει δύο ρίζες άνισες, σημαίνει ότι είναι $\Delta > 0$.
- έχει μία τουλάχιστον λύση, σημαίνει ότι είναι $\Delta \geq 0$.
- έχει μία διπλή ρίζα, σημαίνει ότι είναι $\Delta = 0$.
- δεν έχει πραγματικές ρίζες, σημαίνει ότι είναι $\Delta < 0$.

☑ **Άθροισμα και γινόμενο ριζών της εξίσωσης** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$

- Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, S το άθροισμα και P το γινόμενό τους, τότε έχουμε:

$\boxed{S = x_1+x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}}$ **και** $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ **(τύποι του Vieta)**

- Αν $S = x_1+x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$, τότε η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2

☼ **Παρατήρηση 5**

1. Μπορούμε να βρούμε τις ρίζες x_1 και x_2 μιας εξίσωσης χωρίς να τη λύσουμε, βρίσκοντας δύο αριθμούς με άθροισμα x_1+x_2 και γινόμενο $x_1 \cdot x_2$

Π.χ.

Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x+2=0$. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της τότε: $x_1+x_2=3$ και $x_1 \cdot x_2=2$. Γινόμενο 2 έχουν οι αριθμοί: 1 , 2. Άρα $x_1=1$, $x_2=2$

2. Αν γνωρίζουμε τις ρίζες x_1 , x_2 μιας εξίσωσης , τότε μπορούμε να βρούμε την εξίσωση αυτή .

Π.χ.

Η εξίσωση με ρίζες $x_1=2$, $x_2=3$ είναι $x^2-5x+6=0$ αφού $S = x_1+x_2 = 2+3=5$ και $P = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6$

3. Αν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών x_1 και x_2 τότε μπορούμε να βρούμε τους αριθμούς αυτούς λύνοντας την εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$

Π.χ.

Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 2 = 0$ (1) . Για να τους βρούμε λύνουμε την (1) .

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{3} \\ x_2 = 1-\sqrt{3} \end{cases}$$

☼ **Υπενθύμιση:**

Ισχύουν : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$ **και**

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)$

Παράδειγμα 7ο

Αν x_1, x_2 **είναι οι ρίζες της εξίσωσης** $x^2-2x-2=0$ **να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) x_1+x_2 **β)** x_1x_2 **γ)** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ **δ)** $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$ **ε)** $x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}$**.**

Λύση:

$\alpha=1, \beta=-2, \gamma=-2$

α) $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-2}{1}=2$.

β) $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$.

γ) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{2}{-2}=-1$.

δ) $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2=2^2-2(-2)=4+4=8$.

ε) $x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1\cdot x_2\left(x_1+x_2\right)=2^3-3\cdot(-2)\cdot 2=8+12=20$.

☑ Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού .

I. Εξισώσεις της μορφής : $\alpha x^2+\beta|x|+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$

Επειδή $|x|^2=x^2$ η εξίσωση $\alpha x^2+\beta|x|+\gamma=0$ γράφεται :

$\alpha|x|^2+\beta|x|+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ (1) . Για τη λύση της (1) θέτουμε $|x|=\omega$, $\omega\geq 0$, οπότε η (1) γίνεται : $\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$.

Παράδειγμα 8ο

Να λυθεί η εξίσωση : $3x^2-5|x|-2=0$

Λύση

$$3x^2-5|x|-2=0 \Leftrightarrow 3|x|^2-5|x|-2=0 \overset{\text{θέτω } |x|=\omega}{\Leftrightarrow} 3\omega^2-5\omega-2=0 \Leftrightarrow \omega_1=2 \text{ ή } \omega_2=-\frac{1}{3}$$

Επειδή $\omega=|x|\geq 0$, δεχόμαστε μόνο τη θετική ρίζα.

Έτσι έχουμε: $\omega=2\Leftrightarrow|x|=2\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

II. Κλασματικές εξισώσεις

Παράδειγμα 9ο

Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{x^2}{x-1}-8=\frac{1}{x-1}$

Λύση
Πρέπει : $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Έχουμε :

$$\frac{x^2}{x-1}-8=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\frac{x^2}{x-1}-8(x-1)=\frac{1}{x-1}(x-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-8(x-1)=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+7=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}=\begin{cases}x_1=7\\ x_2=1\end{cases}$$

Η x =1 απορρίπτεται λόγω του περιορισμού . Άρα x = 7

III. Διτετράγωνες εξισώσεις της μορφής: $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$

Παράδειγμα 10ο

Να λυθεί η εξίσωση : $9x^4-37x^2+4=0$

Λύση

Έχουμε:

$$9x^4-37x^2+4=0 \Leftrightarrow 9\left(x^2\right)^2-37x^2+4=0 \overset{\text{θέτω } x^2=\psi}{\Leftrightarrow} 9\psi^2-37\psi+4=0\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=4\\ \text{ή}\\ \psi=1/9\end{cases}$$

Έτσι:

i. Αν ψ = 4 τότε : $\psi=4\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

ii. Αν $\psi=\frac{1}{9}$ τότε : $\psi=\frac{1}{9}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ή $x=-\frac{1}{3}$

Γενικά μια διτετράγωνη εξίσωση μπορεί να έχει 4 ή 2 ή καμία λύση .

☼ **<u>Παρατήρηση 6</u>**

Είδος ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$

Δίνεται η εξίσωση: $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0}$, $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$. Αν $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$ τότε :

Αν :

- $\{P<0\}$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες
- $\{\Delta\geq 0,\ P>0,\ S>0\}\Leftrightarrow$ {τότε η (1) έχει δύο ρίζες θετικές}
- $\{\Delta\geq 0,\ P>0,\ S<0\}\Leftrightarrow$ {τότε η (1) έχει δύο ρίζες αρνητικές}

- ❖ $\{\Delta > 0,\ P > 0,\ S > 0\} \Leftrightarrow$ {τότε η (1) έχει δύο ρίζες θετικές και άνισες}
- ❖ $\{\Delta > 0,\ P > 0,\ S > 0\} \Leftrightarrow$ {τότε η (1) έχει δύο ρίζες αρνητικές και άνισες}
- ❖ $\{\Delta > 0,\ S = 0\} \Leftrightarrow$ {τότε η (1) έχει δύο ρίζες αντίθετες}
- ❖ $\{\Delta > 0,\ P = 1\} \Leftrightarrow$ {τότε η (1) έχει δύο ρίζες αντίστροφες}

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^2 - x - 6 = 0$ ii. $3x^2 - 4x - 7 = 0$
iii. $-2x^2 + 3x - 7 = 0$ iv. $9x^2 + 12x + 4 = 0$
v. $-2x^2 + 6x - 4 = 0$ vi. $2x^2 + x + 1 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $2x^2 + x = 0$ ii. $2x^2 - 4 = 0$ iii. $2x^2 + 1 = 0$
iv. $-2x^2 + 6x = 0$ v. $2(x-3) = x^2 - 6$ vi. $2x(x-3) = x^2$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $2x(x+3) + 5 = x^2$
ii. $x(7x+3) = 5x^2 - 2x - 2$
iii. $(x+2)^2 - 2x(6-x) = -2(3x-10)$
iv. $(4x+1)^2 - 9 = (x+1)^2$
v. $(4x-6)\cdot(x+1) = (5x-10)\cdot(x-1)$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

Α) $x^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)x + \sqrt{3} = 0$ Β) $x^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)x - \sqrt{2} = 0$

5. Η εξίσωση $x^2 + (m - 1)x - 1 = 0$ έχει ρίζες οποιοσδήποτε κι αν είναι ο m. Γιατί;

6. Αν η εξίσωση $x^2 - 4x + \alpha = 0$ έχει για διπλή ρίζα το 2, τότε ο α ισούται με:

Α. 1 Β. – 1 Γ. 4 Δ. - 4 Ε. 0

7. Ποιο είναι το κ όταν η εξίσωση $6x^2 + 7x + \kappa = 0$ έχει μια ρίζα διπλή;

8. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 4x + 6 = \alpha(\alpha-1)$ έχει μια ρίζα διπλή .

9. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2x - \mu + 3 = 0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ:

α) έχει δύο διαφορετικές ρίζες β) έχει μια διπλή ρίζα

γ) δεν έχει ρίζες.

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 6x – 4\lambda + 1 = 0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ:

α) έχει δύο διαφορετικές ρίζες β) έχει μια διπλή ρίζα

γ) δεν έχει ρίζες.

11. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^2 + (\lambda+1)x + \lambda = 0$

ii. $(\lambda+1)x^2 + \lambda x - 1 = 0 \,, \lambda \neq -1$

iii. $(\lambda+1)x^2 + \lambda x - 1 = 0 \,, \lambda \in \mathbb{R}$

12. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$(m-3)\ x^2 - 2mx + m + 2 = 0\,, \quad m \neq 3$$

για τις διάφορες τιμές του m.

13. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 - (\alpha+2)x + 9 = 0$ να έχει διπλή ρίζα η οποία να υπολογιστεί.

14. Αν η εξίσωση $(\lambda^2 - 2\lambda - 2)x^2 + (4\lambda + 7)x + 2\lambda^2 = 0$ έχει ρίζα το -2 να βρεθεί ο λ.

15. Έστω η εξίσωση $\lambda x^2 + 5x + 10 = 0$ (1). Για ποιες τιμές του λ

Α. Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$;
Β. Έχει άνισες ρίζες στο $\mathbb{R}$;
Γ. Δύο ίσες ρίζες στο $\mathbb{R}$;

16. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων χωρίς να υπολογίσετε την διακρίνουσά τους.

α) $x^2 + 6x + 8 = 0$ β) $x^2 - 8x + 15 = 0$

γ) $x^2 + x - 12 = 0$ δ) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

17. Να σχηματίσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

α) $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ β) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$

γ) $x_1 = α + β$ $x_2 = α - β$ δ) $x_1 = 5 + \sqrt{2}$, $x_2 = 5 - \sqrt{2}$

18. Να βρείτε δύο αριθμούς :

α) με άθροισμα $\frac{5}{6}$ και γινόμενο $\frac{1}{6}$

β) με άθροισμα 2 και γινόμενο -1

19. Ποιο είναι το κ, όταν η εξίσωση $κx^2 - 4x - 35 = 0$ έχει άθροισμα ριζών ίσο με 1;

20. Ποιο είναι το κ όταν η εξίσωση $2x^2 + κ(x - 6) = 0$ έχει ρίζες των οποίων το γινόμενο είναι $-\frac{1}{2}$;

21. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 6x - 7 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 x_2$ γ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ δ) $x_1^2 + x_2^2$ ε) $x_1^3 + x_2^3$.

22. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ β) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

γ) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$ δ) $6y^4 + 17y^2 = -12$

ε) $(x - 4)^4 - 7(x-4)^2 + 6 = 0$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 8|x| + 7 = 0$ β) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$

γ) $(x + 1)^2 + |x + 1| - 2 = 0$ δ) $(x - 1)^2 - 4 = 3|x - 1|$

ε) $(2x-1)^2 - |2x-1| - 6 = 0$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ **ii.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

iii. $16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} - \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$

ii. $\dfrac{x+5}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{10}{3}$

iii. $\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{16}{x^2+2x} = \dfrac{2}{x}$