ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ εφόσον υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ εφόσον υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο.

3) Οι παραπάνω κανόνες ισχύουν και στην περίπτωση που $x\to x_0^+$ ή $x\to x_0^-$.

4) Δεν πρέπει να μπερδεύουμε τους λόγους $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ και $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$,

5) Εάν το όριο δεν είναι της μορφής $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, τότε η εφαρμογή του κανόνα de l' Hospital, οδηγεί σε λάθος αποτέλεσμα.

6) Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ εφόσον υπάρχει κλπ.

7) Εάν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

8) Μερικές φορές ο κανόνας de l' Hospital, οδηγεί σε φαύλο κύκλο.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}=$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$

$= \ldots\ldots\ldots$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$=\ldots\ldots\ldots$

Σε αυτές τις περιπτώσεις ο παλιός τρόπος υπολογισμού του ορίου είναι προτιμητέος και ο μόνος που οδηγεί στην εύρεση του ορίου.

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

$=\sqrt{1+0}=1.$

9) Σε πολύπλοκες μορφές απομονώνουμε τις παραστάσεις που δημιουργούν την απροσδιοριστία και εφαρμόζουμε σε αυτές τον κανόνα.

10) Στις εφαρμογές που χρησιμοποιούμε τον κανόνα, δεν θα ελέγχουμε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται.

11) Μορφή ($\pm\infty$)0

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]\overset{(\pm\infty)0}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\underset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)ή}{=}}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}=\ldots\ldots$$

(Άσκηση 2a)

12) Μορφή (+∞)-(+∞)

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=}\lim_{x\to x_0}\left[g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)\right]=+\infty(\kappa-1)$$

,όπου $\kappa=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ μορφή $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

☛ Αν $\kappa\neq1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\pm\infty$.

(Άσκηση 2b)

☛ Αν κ=1 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=(+\infty)0$ που είναι η μορφή (9). (Άσκηση 2c)

13) Μορφές 0^0, $1^{+\infty}$ και $(+\infty)^0$

Θέτουμε $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ και υπολογίζουμε το όριο g(x)lnf(x) που είναι μορφή 0(-∞), (+∞)0 και 0(+∞) αντίστοιχα.

(Ασκήσεις 2d, 2e, 2f)

14) Πολλές φορές μέσα σε ένα όριο, υπάρχουν περισσότερες από μια απροσδιόριστες μορφές. Υπολογίζουμε ξεχωριστά το καθένα όριο (άσκηση 12).

15) Όταν σε ένα όριο υπάρχουν παράγοντες που δεν οδηγούν σε απροσδιοριστία, απομονώνουμε τους παράγοντες αυτούς σε δικό τους όριο (άσκηση 13).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Υπολογίστε τα όρια:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2+3x-4}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x^2}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}$.

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3-5e^{x-1}}{x^3+x^2+x-3}$.

g. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

h. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$.

i. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$.

j. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$.

k. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 7x}$.

l. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$.

m. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{2x-\pi}$.

n. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}$.

o. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$.

p. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln^2x}{x}$.

q. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1+lnx}$.

r. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

s. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx}{x^3}$.

2) Υπολογίστε τα όρια:

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$.

b. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln x)$.

c. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

d. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

e. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

f. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

3) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, x>0.

4) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2-1}$.

5) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^3}{\ln x}$.

6) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}$.

7) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$.

8) <u>ΘΕΜΑ 2ον (2001)</u>

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2, & x\le 3\\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3\end{cases}$.

Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9. Μονάδες 9

9) <u>ΘΕΜΑ 2ον (2004)</u>

Έστω η συνάρτηση f με τύπο f(x)=x^2lnx.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μονάδες 7

10) <u>ΘΕΜΑ 3ον (1983)</u>

Έστω η συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [0,+∞) με:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x} & \varepsilon\alpha\nu\ \ 0<x\neq 1\\ 0 & \varepsilon\alpha\nu\ \ x=0\\ -1 & \varepsilon\alpha\nu\ \ x=1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της,

ii) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1)

11. Θέμα 3ον θετική -τεχνολογική 2008:
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & \mathbf{\alpha\nu\ x>0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\alpha\nu\ x=0} \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0. Μονάδες 3

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 9

iii) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. Μονάδες 6

12) Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{(1-e^x)(e^{\varepsilon\varphi x}-e^x)}{\eta\mu x\cdot(\varepsilon\varphi x-x)}$, στο $x_0=0$.

13) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu 2x)}{\ln(\eta\mu x)}$.

14) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

15) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

16) END