ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (-1, +\infty) \to R$ με $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(x)=f(x)+g(x)$

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$, η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία $x = 3$

δ) Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και $A(0,\alpha)$ σημείο του άξονα $y'y$, με $\alpha > 0$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΜΝ κάθε χρονική στιγμή t ισούται με $\Phi(x(t))$

ii) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με $\left(2\ln 3 + \dfrac{8}{9}\right)$ cm^2/sec

ΛΥΣΗ

α) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} = 0$, $x \in (-1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση επαληθεύεται για $x = 0$. Πράγματι

$$\ln(0+1) + \frac{0}{0+1} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Άρα $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης $\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$, $x > -1$

Η συνάρτηση Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$, με

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x+1}(x+1)' + \frac{(x)' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

Είναι $\Phi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας – προσήμου της συνάρτησης Φ είναι ο παρακάτω:

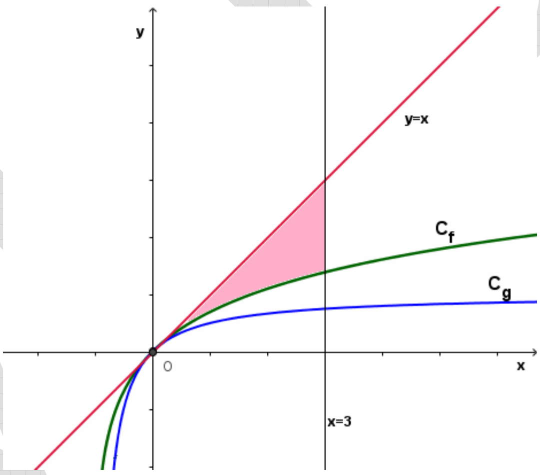
x	-1	0	$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	
Φ		$\nearrow$	
$\Phi(x)$		$-$	$+$

Έχουμε:

- Για $-1 < x < 0 \overset{\Phi\uparrow}{\Rightarrow} \Phi(x) < \Phi(0) \Rightarrow \Phi(x) < 0$
- Για $x > 0 \overset{\Phi\uparrow}{\Rightarrow} \Phi(x) > \Phi(0) \Rightarrow \Phi(x) > 0$

Επομένως $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0$ μόνο για $x = 0$

β) Είναι: $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x>-1$ και $g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $x\neq-1$



Στο σημείο $O(0,0)$ έχουμε:

$f(0) = \ln(0+1) = 0$, $f'(0)=\dfrac{1}{0+1}=1$ και

$g(0) = \dfrac{0}{0+1} = 0$, $g'(0)=\dfrac{1}{(0+1)^2}=1$

Επομένως στο σημείο $O(0,0)$ έχουμε κοινή εφαπτομένη με εξίσωση $y = x$, η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.

γ) Για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-1,+\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται από την ευθεία $y = x$ και κάτω, δηλαδή ισχύει $f(x) \le x$, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f την ευθεία $y = x$ και την ευθεία $x = 3$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^3 |f(x) - x|\,dx = \int_0^3 \big(x - f(x)\big)\,dx = \int_0^3 x\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx =$$

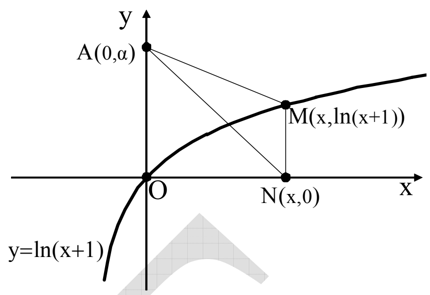
$$= \int_0^3 x\,dx - \int_0^3 \ln(x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 - \int_0^3 (x)'\cdot\ln(x+1)\,dx =$$

$$= \frac{9}{2} - \big[x\cdot\ln(x+1)\big]_0^3 + \int_0^3 \frac{x}{x+1}\,dx = \frac{9}{2} - 3\cdot\ln 4 + \int_0^3 \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{9}{2} - 3\cdot\ln 4 + \int_0^3 1\,dx - \int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{9}{2} - 3\cdot\ln 4 + 1\cdot(3-0) - \big[\ln(x+1)\big]_0^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - 3\cdot\ln 4 + 3 - (\ln 4 - \ln 1) = \frac{15}{2} - 4\cdot\ln 4$$

δ) i) 1ος Τρόπος:



Είναι:

$\overrightarrow{AM}=\left(x\ ,\ \ln(x+1)-\alpha\right),\ \overrightarrow{AN}=\left(x\ ,-\alpha\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AN}\right)=\begin{vmatrix} x & \ln(x+1)-\alpha \\ x & -\alpha \end{vmatrix}=$$

$$=-\alpha x-x\ln(x+1)+\alpha x=-x\ln(x+1)$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου AMN είναι:

$$E=E_{(AMN)}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AN}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-x\ln(x+1)\right|=\frac{1}{2}x\ln(x+1),\ x>0$$

2ος Τρόπος:

Είναι:

$$E=E_{(AMN)}=\frac{1}{2}d(A,MN)\cdot(MN)=\frac{1}{2}x\cdot f(x)=\frac{1}{2}x\ln(x+1),\ x>0$$

Επειδή η τετμημένη x του σημείου M είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\ln\left(x(t)+1\right),\ x(t)>0$$

Οπότε:

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)\ln(x(t)+1)\right)'=\frac{1}{2}\left(x'(t)\ln(x(t)+1)+x(t)\frac{(x(t)+1)'}{x(t)+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x'(t)\ln(x(t)+1)+x(t)\frac{x'(t)}{x(t)+1}\right)=\frac{1}{2}\left(2\ln(x(t)+1)+x(t)\frac{2}{x(t)+1}\right)=$$

$$=\ln(x(t)+1)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=\Phi\left(x(t)\right),\ x(t)>0$$

ii) Είναι:

$$\ln\left(x(t)+1\right)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=2\ln3+\frac{8}{9}\Leftrightarrow\ln\left(x(t)+1\right)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=\ln9+\frac{8}{9}\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x(t)+1\right)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=\ln(8+1)+\frac{8}{8+1}\Leftrightarrow\Phi\left(x(t)\right)=\Phi(8)\underset{\Phi:1-1}{\overset{\Phi\uparrow}{\Leftrightarrow}}x(t)=8$$

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x}$, $x\le0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Ένα υλικό σημείο $A\left(\alpha\ ,\sqrt{-\alpha}\right)$, $\alpha<0$ κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $\alpha'(t)=-\alpha(t)$. Επίσης υλικό σημείο $M(x,y)$ με $x>0$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y=x$

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $A\hat{O}M=\theta$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $(OA)=\sqrt{2}$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις: $y=\sqrt{-x}$ με $x\le0$, $y=x$ με $x\ge0$ και την $y=\alpha'(t_0)$

iii) Να βρείτε ευθεία παράλληλη με τον άξονα y΄y, η οποία να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty\,,0)$, με $f'(x)=\left(\sqrt{-x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}(-x)'=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty\,,0]$
- $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\,,0]$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty\,,0)$, με

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\left(\sqrt{-x}\right)'}{\left(\sqrt{-x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{-x}}(-x)'}{(-x)}=\frac{1}{4x\sqrt{-x}}$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty\,,0]$
- $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty\,,0]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\,,0]$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f\left((-\infty,0]\right)=\left[f(0),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)$$

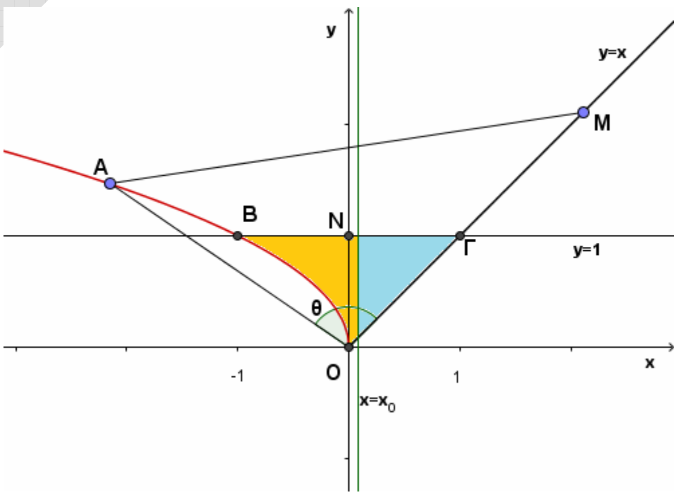
Όμως:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}\overset{-x=u}{=}\lim_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f\left((-\infty,0]\right)=[0,+\infty)$$

β) i) 1ος Τρόπος:



Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

$\hat{AOM}=\theta=\theta(t)$ και $A\left(\alpha(t),\sqrt{-\alpha(t)}\right)$,

όπου $\alpha(t)<0$

Η ευθεία $y=x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $x\hat{O}M=\frac{\pi}{4}$ και η ευθεία ΟΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{OA}=\varepsilon\varphi\left(\theta(t)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{-\alpha(t)}}{\alpha(t)}=-\frac{1}{\sqrt{-\alpha(t)}}$$

Άρα είναι:

$$\left[\varepsilon\varphi\left(\theta(t)+\frac{\pi}{4}\right)\right]'=\left(-\frac{1}{\sqrt{-\alpha(t)}}\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\theta(t)+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\theta'(t)=\frac{\left(\sqrt{-\alpha(t)}\right)'}{-\alpha(t)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\theta(t)+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{-\alpha'(t)}{2\sqrt{-\alpha(t)}}}{-\alpha(t)}\overset{\alpha'(t)=-\alpha(t)}{\Leftrightarrow}\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\theta(t)+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{-\alpha(t)}}\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t)=\frac{-1}{2\sqrt{-\alpha(t)}}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\theta(t)+\frac{\pi}{4}\right)\quad(1)$$

Τη χρονική στιγμή t_o είναι:

$$(OA)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2(t_o)+\left(\sqrt{-\alpha(t_o)}\right)^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\alpha^2(t_o)-\alpha(t_o)-2=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha(t_o)=-1\ (\text{δεκτή})\quad\text{ή}\quad\alpha(t_o)=2\ (\text{απορρίπτεται}),\ \text{αφού}\ \alpha(t_o)<0$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_o είναι $A(-1,1)$, δηλαδή το σημείο A ανήκει στην ευθεία $y=-x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$

Επομένως είναι $\theta(t_o)=\hat{AOM}=\frac{\pi}{2}$ και από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\theta'(t_o)=\frac{-1}{2\sqrt{-\alpha(t_o)}}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\theta(t_o)+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\ \text{rad}/\text{μονάδα χρόνου.}$$

2^{ος} Τρόπος

Είναι:

$$\overrightarrow{OM}=(x,x),\ \overrightarrow{OA}=\left(\alpha,\sqrt{-\alpha}\right)\ \text{και}\ \overrightarrow{AM}=\left(x-\alpha\ ,\ x-\sqrt{-\alpha}\right)$$

$$(OM)=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x\ ,\ (OA)=\sqrt{\alpha^2+\left(\sqrt{-\alpha}\right)^2}=\sqrt{\alpha^2-\alpha}\ \text{ και }\ (AM)=\sqrt{(x-\alpha)^2+\left(x-\sqrt{-\alpha}\right)^2}$$

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$(AM)^2=(OM)^2+(OA)^2-2(OM)(OA)\sigma\upsilon\nu\theta\ ,\ \text{οπότε}$$

$$(x-\alpha)^2+\left(x-\sqrt{-\alpha}\right)^2=2x^2+\alpha^2-\alpha-2\sqrt{2}x\sqrt{\alpha^2-\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$$

$$x^2-2x\alpha+\alpha^2+x^2-2x\sqrt{-\alpha}+(-\alpha)=2x^2+\alpha^2-\alpha-2\sqrt{2}x\sqrt{\alpha^2-\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$$

$$-2x\alpha-2x\sqrt{-\alpha}=-2\sqrt{2}x\sqrt{\alpha^2-\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow\alpha+\sqrt{-\alpha}=\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2-\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\theta$$

Την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

$$\alpha(t)+\sqrt{-\alpha(t)}=\sqrt{2}\sqrt{\alpha(t)^2-\alpha(t)}\ \sigma\upsilon\nu\theta(t)$$

Οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$\left(\alpha(t)+\sqrt{-\alpha(t)}\right)'=\left(\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2(t)-\alpha(t)}\ \sigma\upsilon\nu\theta(t)\right)'\Leftrightarrow$$

$$\alpha'(t)+\frac{-\alpha'(t)}{2\sqrt{-\alpha(t)}}=\sqrt{2}\cdot\frac{2\alpha(t)\alpha'(t)-\alpha'(t)}{2\sqrt{\alpha^2(t)-\alpha(t)}}\sigma\upsilon\nu\theta(t)-\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2(t)-\alpha(t)}\ \eta\mu\theta(t)\theta'(t)\overset{\alpha'(t)=-\alpha(t)}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha(t)+\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{-\alpha(t)}}=\sqrt{2}\cdot\frac{-2\alpha^2(t)+\alpha(t)}{2\sqrt{\alpha^2(t)-\alpha(t)}}\sigma\upsilon\nu\theta(t)-\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2(t)-\alpha(t)}\ \eta\mu\theta(t)\theta'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$-\alpha(t_0)+\frac{\alpha(t_0)}{2\sqrt{-\alpha(t_0)}}=\sqrt{2}\cdot\frac{-2\alpha^2(t_0)+\alpha(t_0)}{2\sqrt{\alpha^2(t_0)-\alpha(t_0)}}\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)-\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2(t_0)-\alpha(t_0)}\,\eta\mu\theta(t_0)\theta'(t_0) \quad (2)$$

Όμως τη χρονική στιγμή t_0 είναι $(OA)=\sqrt{2}$, οπότε έχουμε:

$$\sqrt{\alpha^2(t_0)-\alpha(t_0)}=\sqrt{2}\Leftrightarrow \alpha^2(t_0)-\alpha(t_0)-2=0\Leftrightarrow$$

$\alpha(t_0)=-1$ δεκτή ή $\alpha(t_0)=2$ απορρίπτεται, αφού $\alpha(t_o)<0$

Άρα τη χρονική στιγμή t_o είναι $A(-1,1)$, δηλαδή το σημείο A ανήκει στην ευθεία $y=-x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$

Επομένως είναι $\theta(t_o)=A\hat{O}M=\frac{\pi}{2}$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 από τη σχέση (2) έχουμε:

$$1+\frac{-1}{2\sqrt{1}}=\sqrt{2}\cdot\frac{-2-1}{2\sqrt{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\theta'(t_0)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}=-2\cdot\theta'(t_0)\Leftrightarrow\theta'(t_0)=-\frac{1}{4}\ \text{rad / μονάδα χρόνου.}$$

Σημείωση

Στον 2^o Τρόπο αντί του νόμου των συνημιτόνων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον Τύπο: $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OA}|}$

ii) Είναι:

$$y=\alpha'(t_0)=-\alpha(t_0)=1$$

Αν η ευθεία $y=1$ τέμνει την C_f στο σημείο Β, τον άξονα $y'y$ στο σημείο Ν και την ευθεία $y=x$ στο σημείο Γ, τότε είναι $E(\Omega)=E_1+E_2$, όπου E_1 το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΒΝ και E_2 το εμβαδόν του τριγώνου ΟΝΓ.

$$E_1=\int_{-1}^{0}\left(1-\sqrt{-x}\right)dx=1+\int_{-1}^{0}\sqrt{-x}\,(-x)'\,dx=1+\frac{2}{3}\left[(-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}=1+\frac{2}{3}(0-1)=\frac{1}{3} \quad \text{και}$$

$$E_2=\frac{1}{2}(ON)(N\Gamma)=\frac{1}{2}1\cdot1=\frac{1}{2}$$

Άρα

$$E(\Omega)=E_1+E_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

iii) Έστω $x=x_0$ η ζητούμενη ευθεία. Είναι $E_1<E_2$, οπότε $x_0\in(0,1)$

Θέλουμε:

$$\int_{x_0}^{1}(1-x)\,dx=\frac{E(\Omega)}{2}\Leftrightarrow\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{1}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}-x_0+\frac{x_0^{\,2}}{2}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}-x_0+\frac{x_0^{\,2}}{2}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow 6x_0^2-12x_0+1=0\Leftrightarrow x_0=1+\frac{\sqrt{30}}{6}\ \text{απορ. ή}\ x_0=1-\frac{\sqrt{30}}{6}\ \text{δεκτή,}$$

αφού $x_0\in(0,1)$

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(e^x+1)=x+e^x+1,\ \text{για κάθε } x\in R \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(x-1)+x,\ x\in(1,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.

δ) Να υπολογίσετε το $f(e^2+1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1)-1=f^{-1}(e^2+3)$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $e^x+1=t \underset{t>1}{\overset{x\in R}{\Leftrightarrow}} e^x=t-1 \Leftrightarrow x=\ln(t-1)$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$f(t)=\ln(t-1)+t,\ t\in(1,+\infty)$$

Επομένως:

$$f(x)=\ln(x-1)+x,\ x\in(1,+\infty)$$

β) Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}(x-1)'+1=\frac{1}{x-1}+1>0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι και «$1-1$», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f\big((1,+\infty)\big)=\Big(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\Big)=(-\infty,+\infty)=R \text{ , αφού}$$

- $\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x-1)\overset{x-1=u}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}x=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)\overset{x-1=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

γ) Για $x,y\in(1,+\infty)$ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ f(y)=f\big(f^{-1}(x)\big)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\ln(x-1)+x & (2) \\ x=\ln(y-1)+y & (3)\end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$y-x=\ln(x-1)+x-\ln(y-1)-y \Leftrightarrow \ln(x-1)+2x=\ln(y-1)+2y \Leftrightarrow h(x)=h(y) \quad (4),$$

όπου $h(t)=\ln(t-1)+2t,\ t\in(1,+\infty)$

Για κάθε $t\in(1,+\infty)$ έχουμε:

$$h'(t)=\frac{1}{t-1}(t-1)'+2=\frac{1}{t-1}+2>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι και « $1-1$ », οπότε από τη σχέση (4) προκύπτει $y=x$ (5)

Λύνουμε λοιπόν το σύστημα των εξισώσεων (2) και (5):

$$\begin{cases} y=\ln(x-1)+x \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln(x-1)+x \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1)=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(2,2)$

δ) Είναι:

$$f(e^2+1)=\ln(e^2+1-1)+e^2+1=\ln e^2+e^2+1=2\ln e+e^2+1=e^2+3$$

Άρα

$$f^{-1}(e^2+3)=e^2+1$$

Έχουμε:

$$f^{-1}(x+1)-1=f^{-1}(e^2+3)\Leftrightarrow f^{-1}(x+1)-1=e^2+1\Leftrightarrow f^{-1}(x+1)=e^2+2\Leftrightarrow$$

$$x+1=f(e^2+2)\Leftrightarrow x+1=\ln(e^2+2-1)+e^2+2\Leftrightarrow x=\ln(e^2+1)+e^2+1$$

ε) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A_f=(1,+\infty)$ και σύνολο τιμών $f(A_f)=\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών $f^{-1}(A_{f^{-1}})=(1,+\infty)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x\le 1$ και δεδομένου ότι $f^{-1}(x)\in(1,+\infty)$, δηλαδή $f^{-1}(x)>1$ η ανίσωση $f^{-1}(x)>x$ αληθεύει.
- Αν $x>1$, τότε έχουμε:

$$f^{-1}(x)>x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>1 \\ f\left(f^{-1}(x)\right)>f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\ln(x-1)+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \ln(x-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>1 \\ \ln(x-1)<\ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty,1]\cup(1,2)=(-\infty,2)$

ΘΕΜΑ 4ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)}+e^{f(x)+1}+f(x)-2e^2=x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $e^{\xi}+e=(2e^2-\xi)e^{-\xi}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le x$ και να αποδείξετε ότι $f(x)-1\ge 0$ για κάθε $x\ge 1$

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

Έστω ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ (2)

Είναι:

$$\begin{cases} 2f(x_1) \geq 2f(x_2) \\ f(x_1)+1 \geq f(x_2)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{2f(x_1)} \geq e^{2f(x_2)} & (3) \\ e^{f(x_1)+1} \geq e^{f(x_2)+1} & (4) \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2), (3) και (4) έχουμε:

$$e^{2f(x_1)} + e^{f(x_1)+1} + f(x_1) \geq e^{2f(x_2)} + e^{f(x_2)+1} + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x_1)} + e^{f(x_1)+1} + f(x_1) - 2e^2 \geq e^{2f(x_2)} + e^{f(x_2)+1} + f(x_2) - 2e^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 \geq x_2$$

που είναι άτοπο

Επομένως για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{2x} + e^{x+1} + x - 2e^2$, $x \in R$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = 2e^{2x} + e^{x+1} + 1$ (5)

Είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $g\big(f(x)\big) = x$, για κάθε $x \in R$, οπότε για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $g\big(f(x_1)\big) < g\big(f(x_2)\big) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι «$1-1$», άρα αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad y \in R$$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$f^{-1}(y) = e^{2y} + e^{y+1} + y - 2e^2, \quad y \in R$$

Οπότε:

$$f^{-1}: R \to R \text{ με } f^{-1}(x) = e^{2x} + e^{x+1} + x - 2e^2, \quad x \in R$$

γ) Είναι:

f^{-1} συνεχής στο $[0,1]$, $f^{-1}(1) = 1 > 0$ και

$f^{-1}(0) = -2e^2 + e + 1 = (1-e)(2e+1) < 0$,

οπότε

$f^{-1}(1) \cdot f^{-1}(0) < 0$

Άρα η συνάρτηση f^{-1} ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,1]$ επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f^{-1}(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$e^{2\xi} + e^{\xi+1} + \xi - 2e^2 = 0 \Leftrightarrow e^{2\xi} + e^{\xi+1} = 2e^2 - \xi \Leftrightarrow e^{\xi}(e^{\xi} + e) = 2e^2 - \xi \Leftrightarrow e^{\xi} + e = (2e^2 - \xi)e^{-\xi}$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x\,,\ \text{οπότε}\ \lim_{x\to 1} f\left(f^{-1}(x)\right) = \lim_{x\to 1} x = 1 \quad (6)$$

Θέτουμε $y = f^{-1}(x) > 0$. Όταν $x \to 1$ και το $y \to 1$, οπότε από τη σχέση (6) προκύπτει:

$$\lim_{y\to 1} f(y) = 1 = f(1)\,,\ \text{αφού}\ f^{-1}(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

ε) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(x) \le x \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} x \le f^{-1}(x) \Leftrightarrow x \le e^{2x} + e^{x+1} + x - 2e^2 \Leftrightarrow e^{2x} + e^{x+1} - 2e^2 \ge 0$$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και έχουμε:

$$y^2 + ey - 2e^2 \ge 0 \Leftrightarrow (y-e)(y+2e) \ge 0 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y - e \ge 0 \Leftrightarrow y \ge e$$

Άρα $y \ge e$, οπότε έχουμε $e^x \ge e \Leftrightarrow x \ge 1$

Είναι:

$$x \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(1) \Leftrightarrow f(x) \ge 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \ge 0\,,$$

διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(1) = 1$, αφού $f^{-1}(1) = 1$

ΘΕΜΑ 5ο :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x\ln x - x}$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x} = \kappa$, $x>0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^e \ln x \cdot f(x)dx = \frac{e-1}{e}$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (e^{-1}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1)\cdot\ln\xi_1 + e f(\xi_2)\cdot\ln\xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$f'(x) = (e^{x\ln x - x})' = e^{x\ln x - x}(x\ln x - x)' = f(x)(\ln x + 1 - 1) = f(x)\ln x \quad (1)$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$
			Ελάχιστο	

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=e^{-1}$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f''(x)=(f(x)\cdot\ln x)'=f'(x)\ln x+f(x)\frac{1}{x}\overset{(1)}{=}f(x)(\ln x)^2+f(x)\frac{1}{x}=f(x)\left((\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0$$

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β) Για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$x^x e^{-x}=\kappa\Leftrightarrow \ln(x^x e^{-x})=\ln\kappa\Leftrightarrow x\ln x-x=\ln\kappa\Leftrightarrow e^{x\ln x-x}=\kappa\Leftrightarrow f(x)=\kappa$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x-x}=e^0=1$, αφού

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln x-x}\overset{u=x\ln x-x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}x(\ln x-1)=+\infty$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\kappa<e^{-1}$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ είναι αδύνατη.
- Αν $\kappa=e^{-1}$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει:
  ακριβώς μία λύση την $x=1$, αφού $f(1)=e^{-1}$ και $f(x)>e^{-1}$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$
- Αν $e^{-1}<\kappa<1$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει ακριβώς:
  - μία λύση στο $(0,1)$, αφού $f\left((0,1)\right)=(e^{-1},1)$ και
  - μία λύση στο $(1,+\infty)$, αφού $f\left((1,+\infty)\right)=(e^{-1},+\infty)$
- Αν $\kappa\geq1$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει:
  μία λύση στο $(1,+\infty)$, αφού $f\left((1,+\infty)\right)=(e^{-1},+\infty)$

γ) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_1^e \ln x f(x)dx=\int_1^e f'(x)dx=\left[f(x)\right]_1^e=\left[e^{x\ln x-x}\right]_1^e=e^{e\ln e-e}-e^{-1}=e^0-e^{-1}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

δ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[e^{-1}, 1\right]$ και $\left[1, e\right]$ με παράγωγο $f'(x) = f(x)\ln x$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα αυτά, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (e^{-1}, 1)$ και $\xi_2 \in (1, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(e^{-1})}{1-e^{-1}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 = \frac{f(1)-f(e^{-1})}{\frac{e-1}{e}} \Leftrightarrow \frac{e-1}{e}\cdot f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 = f(1)-f(e^{-1}) \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} \Leftrightarrow f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} \Leftrightarrow (e-1)\cdot f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = f(e)-f(1) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{e-1}{e}\cdot f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 + (e-1)\cdot f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = f(1) - f(e^{-1}) + f(e) - f(1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{e-1}{e}\cdot f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 + (e-1)\cdot f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = f(e) - f(e^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{e-1}{e}\cdot f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 + (e-1)\cdot f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = e^{e\ln e - e} - e^{e^{-1}\ln e^{-1} - e^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e-1}{e}\cdot f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 + e\cdot(e-1)\cdot f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = 1 - e^{-2e^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$(e-1)\cdot f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 + e\cdot(e-1)\cdot f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = e - e^{1-2e^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_1)\cdot \ln\xi_1 + e\cdot f(\xi_2)\cdot \ln\xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$

ΘΕΜΑ 6ο :

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f''(x)\cdot e^{-x} - (f'(x))^2 = 0$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$,
- $2f'(0) + 1 = 0$ **και**
- $f(0) = \ln 2$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) + 1 = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(1+e^x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2f(x) + x \geq \ln 4$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

στ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f''(x)\cdot e^{-x} = \left(f'(x)\right)^2 \Rightarrow \frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = e^x \Rightarrow \left(\frac{-1}{f'(x)}\right)' = (e^x)' \Rightarrow \frac{-1}{f'(x)} = e^x + c\,,\ x \in R\,,$$

αφού

$$f''(x) \neq 0 \Rightarrow f''(x)\cdot e^{-x} \neq 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 \neq 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε: $\dfrac{-1}{f'(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow \dfrac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$, οπότε

$$\frac{-1}{f'(x)} = e^x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) + 1 = \frac{-1}{e^x+1} + 1 \Rightarrow f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x+1}\,,\ x \in R$$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow \left(f(x) + x\right)' = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} \Rightarrow \left(f(x)+x\right)' = \left(\ln(e^x+1)\right)' \Rightarrow$$

$$f(x) + x = \ln(e^x+1) + c_1\,,\ x \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε: $f(0) + 0 = \ln(e^0+1) + c_1 \Leftrightarrow \ln 2 = \ln 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$, οπότε

$$f(x) + x = \ln(e^x+1) \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x+1) - x\,,\ \ x \in R$$

γ) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^x - 1}{e^x+1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1}{e^x+1} < 0 \text{ για κάθε } x \in R,$$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επίσης, έχουμε:

$$f''(x)\cdot e^{-x} = \left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow f''(x) = e^x\cdot\left(f'(x)\right)^2 > 0 \text{ για κάθε } x \in R,$$

άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή.

δ) 1^ος^ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2f(x) + x - \ln 4$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h'(x) = \left(2f(x) + x - \ln 4\right)' = 2f'(x) + 1 = 2\cdot\frac{-1}{e^x+1} + 1 = \frac{e^x - 1}{1 + e^x}$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Ελάχιστο

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o = 0$ με ελάχιστη τιμή $h(0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2f(x) + x - \ln 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2f(x) + x \geq \ln 4$$

2ος τρόπος

Η f είναι κυρτή, άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο O(0,0) βρίσκεται από τη C_f και «κάτω». Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο O(0,0) είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - \ln 2 = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Επομένως για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) + x \geq 2\ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) + x \geq \ln 4$$

ε) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε για τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών της θα βρούμε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln(1+e^x) - x\right) = +\infty \text{ , διότι}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\ln(1+e^x)\right) \overset{u=1+e^x}{=} \lim_{u\to1}(\ln u) = \ln 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+1) - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+1) - \ln e^x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+1}{e^x}\right) \overset{u=\frac{e^x+1}{e^x}}{=} \lim_{u\to1}(\ln u) = 0 \text{, διότι}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι $f(R) = (0, +\infty)$

στ) Έστω η εξίσωση $y = f(x)$, όπου $y \in f(R)$. Έχουμε:

$$y = \ln\frac{e^x+1}{e^x} \Leftrightarrow e^y = \frac{e^x+1}{e^x} \Leftrightarrow e^y \cdot e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x(e^y - 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{1}{e^y - 1} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} x = \ln\frac{1}{e^y - 1} \Leftrightarrow x = -\ln(e^y - 1)$$

Δηλαδή, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ως προς $x \in R$ μοναδική λύση την $x = -\ln(e^y - 1)$ για κάθε $y > 0$, οπότε η f είναι «1−1», επομένως αντιστρέφεται με σύνολο τιμών $f(R) = (0, +\infty)$

Άρα έχουμε $f^{-1}: (0, +\infty) \to R$ με $f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$

Έχουμε:

i) $\lim\limits_{x\to0^+} f^{-1}(x) = -\lim\limits_{x\to0^+}\ln(e^x - 1) \overset{u=e^x-1}{=} -\lim\limits_{u\to0^+}\ln u = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x - 1) \overset{u=e^x-1}{=} -\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u = -\infty$

ΘΕΜΑ 7ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο σ' αυτό το διάστημα και είναι $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (α,β)

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$

γ) Υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(\alpha,\beta)$ με $\kappa\neq\lambda$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda)<0$

δ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,\lambda)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$

ΛΥΣΗ

α) Αφού η συνάρτηση f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ και είναι $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0$, θα υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)<0$. Επομένως για τη συνάρτηση f στο $[\alpha,\gamma]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ ως παραγωγίσιμη.
- $f(\alpha)f(\gamma)<0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha,\gamma]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,γ)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον λύση και στο διάστημα (γ,β)

β) Θέτουμε στην προς απόδειξη σχέση όπου ξ το x και έχουμε:

$$2xf(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow 2xe^{x^2}f(x)+e^{x^2}f'(x)=0\Leftrightarrow (e^{x^2}f(x))'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x^2}f(x)$, στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$, όπου ρ_1,ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Για τη συνάρτηση h ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με παράγωγο $h'(x)=2xe^{x^2}f(x)+e^{x^2}f'(x)$
- $h(\rho_1)=h(\rho_2)=0$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi e^{\xi^2}f(\xi)+e^{\xi^2}f'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$e^{\xi^2}(2\xi f(\xi)+f'(\xi))=0\Leftrightarrow 2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$$

γ) Στα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$, για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\kappa\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\kappa)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}<0$ και
- $\lambda\in(\gamma,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\lambda)=\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}>0$

αφού $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ και $f(\gamma)<0$, (βλέπε και (α) ερώτημα), επομένως $f'(\kappa)f'(\lambda)<0$

δ) Είναι:

$$f'(\kappa)=\lim_{x\to\kappa^+}\frac{f(x)-f(\kappa)}{x-\kappa}<0,\ \text{άρα για } x\in(\kappa,\ \kappa+\delta_1),\ \delta_1>0,\ \text{ισχύει:}$$

$$\frac{f(x)-f(\kappa)}{x-\kappa}<0\overset{x>\kappa}{\Rightarrow}f(x)-f(\kappa)<0\Rightarrow f(x)<f(\kappa)\qquad(1)$$

Είναι:

$$f'(\lambda)=\lim_{x\to\lambda^-}\frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda}>0,\ \text{άρα για } x\in(\lambda-\delta_2,\lambda),\ \delta_2>0,\ \text{ισχύει:}$$

$$\frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda}>0\overset{x<\lambda}{\Rightarrow}f(x)-f(\lambda)<0\Rightarrow f(x)<f(\lambda)\qquad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ελάχιστο στο κ ούτε στο λ. Δεδομένου όμως ότι η f είναι συνεχής στο $[\kappa,\lambda]$ θα έχει σίγουρα ελάχιστο στο διάστημα αυτό. Αφού λοιπόν δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα άκρα του διαστήματος θα το παρουσιάζει σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[\kappa,\lambda]$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0)=0$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f' διατηρεί πρόσημο στο Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η f' δεν διατηρεί πρόσημο στο Δ, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\Delta$ με $f'(x_1)f'(x_2)<0$. Άρα σύμφωνα με το (δ) ερώτημα του προηγουμένου θέματος, θα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq\Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$, που είναι άτοπο αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$

ΘΕΜΑ 8ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\ln x|$, $x>0$

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να βρείτε την παράγωγό της.

β) Να βρείτε:

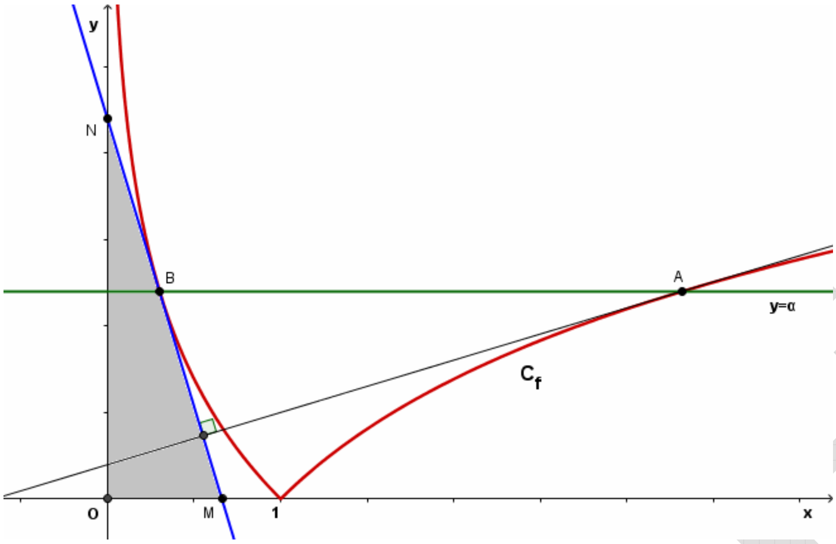
i) Τα κοινά σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ της C_f με την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha>0$

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_A και ε_B της C_f στα σημεία της $A(e^{\alpha},\alpha)$ και $B(e^{-\alpha},\alpha)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\alpha>0$

γ) Έστω Μ και Ν τα σημεία τομής της ευθείας ε_B με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ γίνεται μέγιστο, η ευθεία ε_A διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από το τμήμα της γραφικής παράστασης της $\ln x$, με $x\geq 1$ και το συμμετρικό ως προς τον άξονα $x'x$ τμήμα της γραφικής παράστασης της $\ln x$, με $0<x<1$ που βρίσκεται κάτω από αυτόν. Η C_f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases} \ln x & , \ x\geq 1 \\ -\ln x & , \ 0<x<1 \end{cases}$ και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$

με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ και στο διάστημα $(0,1)$ με $f'(x)=-\dfrac{1}{x}$

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

- Για $x>1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-0}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

- Για $0<x<1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\ln x-0}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{x}}{1}=-1$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Επομένως:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \ x>1 \\ -\dfrac{1}{x} & , \ 0<x<1 \end{cases}$$

β) i) Λύνουμε τα συστήματα: $\begin{cases} y=\ln x \\ y=\alpha \end{cases}$, $x\geq 1$ και $\begin{cases} y=-\ln x \\ y=\alpha \end{cases}$, $0<x<1$

- $\begin{cases} y=\ln x \\ y=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=\alpha \\ y=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^{\alpha} \\ y=\alpha \end{cases}$ Άρα $A(e^{\alpha},\alpha)$

- $\begin{cases} y=-\ln x \\ y=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\ln x^{-1} \\ y=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x^{-1}=\alpha \\ y=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1}=e^{\alpha} \\ y=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^{-\alpha} \\ y=\alpha \end{cases}$ Άρα $B(e^{-\alpha},\alpha)$

ii) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Α είναι:

$$\varepsilon_A: \; y - f(e^{\alpha}) = f'(e^{\alpha})(x - e^{\alpha}) \overset{e^{\alpha}>1}{\Leftrightarrow} y - \alpha = \frac{1}{e^{\alpha}}(x - e^{\alpha}) \Leftrightarrow y = e^{-\alpha}x - 1 + \alpha$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Β είναι:

$$\varepsilon_B: \; y - f(e^{-\alpha}) = f'(e^{-\alpha})(x - e^{-\alpha}) \overset{e^{-\alpha}<1}{\Leftrightarrow} y - \alpha = -\frac{1}{e^{-\alpha}}(x - e^{-\alpha}) \Leftrightarrow y = -e^{\alpha}x + 1 + \alpha$$

Είναι:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = e^{-\alpha} \cdot (-e^{\alpha}) = -e^0 = -1 \text{ , οπότε } \varepsilon_A \perp \varepsilon_B$$

γ) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ε_B με τους άξονες.

Για $x = 0$ είναι $y = 1 + \alpha$ και για $y = 0$ είναι $x = \frac{1+\alpha}{e^{\alpha}}$. Άρα η ε_B τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M\left(\frac{1+\alpha}{e^{\alpha}}, 0\right)$ και τον άξονα $y'y$ στο $N\left(0, 1+\alpha\right)$, $\alpha > 0$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ είναι:

$$E = \frac{1}{2}\left(OM\right)\left(ON\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha}{e^{\alpha}} \cdot \left(1+\alpha\right) = \frac{(1+\alpha)^2}{2e^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{(1+x)^2}{2e^x}, \quad x > 0$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g'(x) = \frac{2(1+x) \cdot 2e^x - 2e^x(1+x)^2}{4e^{2x}} = \frac{2(1+x) - (1+x)^2}{2e^x} = \frac{1 - x^2}{2e^x}$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗	$2e^{-1}$	↘	
			Μέγιστο		

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o = 1$, επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ μεγιστοποιείται για $\alpha = 1$

Για $\alpha = 1$ η ε_A γίνεται $y = e^{-1}x$, άρα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 9ο :

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: :

- **$f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in R$**

α) Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της για κάθε $x\in R$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο R

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$, για κάθε $x>0$

ε) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε και η $f(x)-e^{-f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$\left(f(x)-e^{-f(x)}\right)'=\left(x-1\right)'\Leftrightarrow f'(x)+f'(x)e^{-f(x)}=1\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\left(1+e^{-f(x)}\right)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$$

Άρα

$$f'(x)=\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\ ,\ \ x\in R \quad (1)$$

β) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(0)=0$, δηλαδή η $x=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και έχει μοναδική ρίζα την $x=0$, συμπεραίνουμε ότι:

- για $x<0\Rightarrow f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$ και
- για $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$

Συνεπώς για το πρόσημο της συνάρτησης f ισχύει : $\begin{cases} f(x)<0\ ,\ \ x\in\left(-\infty,0\right) \\ f(x)=0\ ,\ \ x=0 \\ f(x)>0\ ,\ \ x\in\left(0,+\infty\right) \end{cases}$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η συνάρτηση $\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο R. Άρα η συνάρτηση $f'(x)=\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο R, δηλαδή η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με:

$$f''(x)=\left(\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right)'=\frac{(e^{f(x)})'\cdot(1+e^{f(x)})-e^{f(x)}\cdot(1+e^{f(x)})'}{(1+e^{f(x)})^2}=$$

$$=\frac{e^{f(x)}f'(x)\cdot(1+e^{f(x)})-e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}f'(x)}{(1+e^{f(x)})^2}=\frac{e^{f(x)}}{(1+e^{f(x)})^2}\cdot f'(x)>0,$$

αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

δ) Θα αποδείξουμε ότι : $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) < x$, για κάθε $x > 0$

Η συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο $[0, x]$
- παραγωγίσιμη στο $(0, x)$

Επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[0, x]$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \qquad (2)$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R , άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R , οπότε για:

$$0 < \xi < x \Rightarrow f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow \frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) \ , \quad x > 0$$

Θα αποδείξουμε ότι: $x f'(x) < x$, για $x > 0$

Πράγματι, από τη σχέση (1) έχουμε ότι $f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} < \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}} = 1 \overset{x>0}{\Rightarrow} x f'(x) < x$

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) < x$$

ε) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\frac{x}{2} < f(x) < x \Leftrightarrow -\frac{x}{2} > -f(x) > -x \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} > e^{-f(x)} > e^{-x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-f(x)} = 0 \quad (3)$

1ος τρόπος

Είναι:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \Leftrightarrow f(x) - (x - 1) = e^{-f(x)},$$

οπότε :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x\to+\infty} e^{-f(x)} \overset{(3)}{=} 0$$

Άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

2ος τρόπος

Από την αρχική σχέση έχουμε $f(x) = e^{-f(x)} + x - 1$, οπότε:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-f(x)} + x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot e^{-f(x)} + 1 - \frac{1}{x} \right) \overset{(3)}{=} 0 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) \overset{\text{υπόθεση}}{=} \lim_{x\to+\infty} (x - 1 + e^{-f(x)} - x) = \lim_{x\to+\infty} (-1 + e^{-f(x)}) = -1 + 0 = -1$$

Άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

ΘΕΜΑ 10ο :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Α(0,1).

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\eta\mu^2x)-1}{\eta\mu x}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(2016x)-1}{x}=4032f'(0)$

β) Αν επιπλέον για την f ισχύει $f^2(x)-8f(x)=x^2-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

γ) Αν $f(x)=4-\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, η οποία διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$

iv) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx<\frac{22}{5}$

ΛΥΣΗ

α) i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\eta\mu^2x)-1}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\eta\mu^2x)-f(0)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u^2)-f(0)}{u^2}\cdot u=f'(0)\cdot0=0$,

διότι $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u^2)-f(0)}{u^2}\overset{t=u^2}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$

ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(2016x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\big(f(2016x)-1\big)\big(f(2016x)+1\big)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\big(f(2016x)-f(0)\big)\big(f(2016x)+1\big)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2016\big(f(2016x)-f(0)\big)\big(f(2016x)+1\big)}{2016x}=2016f'(0)\big(f(0)+1\big)=2016f'(0)\cdot(1+1)=4032f'(0)$,

διότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2016x)-f(0)}{2016x}\overset{2016x=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)-f(0)}{u}=f'(0)$ και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$f^2(x)-8f(x)=x^2-7\Leftrightarrow f^2(x)-8f(x)+16=x^2-7+16\Leftrightarrow$

$\big(f(x)-4\big)^2=x^2+9\Leftrightarrow g^2(x)=x^2+9$ (1), όπου $g(x)=f(x)-4$, $x\in\mathbb{R}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+9>0$, οπότε $g^2(x)>0\Rightarrow g(x)\neq0$

Η συνάρτηση g λοιπόν είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$, οπότε διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$

Επιπλέον έχουμε $f(0)=1$, οπότε είναι $g(0)=f(0)-4=1-4=-3<0$, άρα $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε $g(x)=-\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)-4=-\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=4-\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$

γ) i) Για $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4-\sqrt{x^2+9}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x}-\frac{|x|}{x}\cdot\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x}+\frac{x}{x}\cdot\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x}+\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right) = 0+1=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(4-\sqrt{x^2+9}-1\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left((4-x)-\sqrt{x^2+9}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(4-x)^2-(x^2+9)}{(4-x)+\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{16-8x+x^2-x^2-9}{4-x+\sqrt{x^2+9}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+7}{4-x+|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-8+\frac{7}{x}\right)}{4-x-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-8+\frac{7}{x}\right)}{x\left(\frac{4}{x}-1-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-8+\frac{7}{x}}{\frac{4}{x}-1-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = \frac{-8}{-2} = 4 = \beta$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = x+4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$

ii) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left(4-\sqrt{x^2+9}\right)' = 0-\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot(x^2+9)' = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)' = -\frac{x'\cdot\sqrt{x^2+9}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+9}\right)'}{x^2+9} = -\frac{\sqrt{x^2+9}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} =$$

$$= -\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} = -\frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R

iii) Έστω $N\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο N είναι:

$$\varepsilon:\ \ y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\left(4-\sqrt{x_0^2+9}\right) = \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+9}}(x-x_0) \quad (1)$$

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο B οι συντεταγμένες του B θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή θα ισχύει:

$$3-\left(4-\sqrt{x_0^2+9}\right) = \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+9}}(-1-x_0) \Leftrightarrow -1+\sqrt{x_0^2+9} = \frac{x_0^2+x_0}{\sqrt{x_0^2+9}} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{x_0^2+9}+x_0^2+9 = x_0^2+x_0 \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+9} = 9-x_0 \quad (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $9 - x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 > 9$ η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.
- Αν $9 - x_0 \geq 0 \Leftrightarrow x_0 \leq 9$ η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$x_0^2 + 9 = (9 - x_0)^2 \Leftrightarrow x_0^2 + 9 = 81 - 18x_0 + x_0^2 \Leftrightarrow 18x_0 = 72 \Leftrightarrow x_0 = 4 \quad \text{(δεκτή)}$$

Επομένως η ζητούμενη ευθεία ε έχει εξίσωση:

$$y - f(4) = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y + 1 = -\frac{4}{5}(x-4) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$$

iv) Επειδή η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R, η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι από την εφαπτομένη και «κάτω», δηλαδή ισχύει:

$$f(x) \leq -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5} \Leftrightarrow f(x) + \frac{4}{5}x - \frac{11}{5} \leq 0$$

και το «ίσον» ισχύει μόνο για $x = 4$ (τετμημένη σημείου επαφής), επομένως δεν είναι πουθενά μηδέν στο διάστημα $[-1, 1]$, οπότε έχουμε:

$$\int_{-1}^{1}\left(f(x) + \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}\right)dx < 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1}\frac{4}{5}x\,dx - \int_{-1}^{1}\frac{11}{5}dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx < -\int_{-1}^{1}\frac{4}{5}x\,dx + \int_{-1}^{1}\frac{11}{5}dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx < -\frac{4}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{11}{5}\big(1-(-1)\big) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx < -\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{5}\cdot 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx < \frac{22}{5}$$

ΘΕΜΑ 11ο :

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\ln x - 1 = 0$, με $x > 1$ έχει ακριβώς μία λύση.

Β. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1, +\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(x) = x\ln x\big(f(x) - f'(x)\big)$ για κάθε $x > 1$ και**
- **$f(e) = e^e$**

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Αν $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$, $x > 1$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

ii) Αν Ε(α) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = f(x) + x\ln x \cdot f'(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 2$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\left(E(\alpha)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{E(\alpha)}\right)$

ΛΥΣΗ

Α. 1ος Τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x\ln x - 1$, $x \in (1, +\infty)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $h'(x) = (x\ln x - 1)' = \ln x + 1$

Για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)>0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Επίσης η συνάρτηση h είναι και συνεχής στο $(1,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$h\big((1,+\infty)\big)=\Big(\lim_{x\to 1^+}h(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty}h(x)\Big)=(-1,+\infty)\ ,\ \text{αφού}$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\big(x\ln x-1\big)=-1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\big(x\ln x-1\big)=+\infty$

Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της h άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1,+\infty)$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα.

2ος Τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x\ln x-1,\ x\in(1,+\infty)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $h'(x)=(x\ln x-1)'=\ln x+1$

Για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)>0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\big(x\ln x-1\big)=-1<0$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(1,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $h(x)<0$ για κάθε $x\in(1,\alpha)$, οπότε $h(\kappa)<0$ για $\kappa\in(1,\alpha)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\big(x\ln x-1\big)=+\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\beta,+\infty)$ με $\beta>\alpha$ τέτοιο, ώστε $h(x)>0$ για κάθε $x\in(\beta,+\infty)$, οπότε $h(\lambda)>0$ για $\lambda\in(\beta,+\infty)$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa\,,\lambda]$ και $h(\kappa)\cdot h(\lambda)<0$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\kappa,\lambda)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow \xi\ln\xi-1=0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$

Επομένως η εξίσωση $x\ln x-1=0$, με $x>1$ έχει ακριβώς μία λύση.

Β. α) Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι:

$$f(x)=x\ln x\big(f(x)-f'(x)\big)\Rightarrow f(x)+x\ln x f'(x)=x\ln x f(x)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x}f(x)+\ln x f'(x)=\ln x f(x)\Rightarrow\big(\ln x f(x)\big)'=\ln x f(x)\Rightarrow \ln x f(x)=c\,e^x$$

Για $x=e$ είναι $\ln e f(e)=c\,e^e\Leftrightarrow e^e=c\,e^e\Leftrightarrow c=1$, οπότε έχουμε:

$$\ln x f(x)=e^x\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x}{\ln x},\ x\in(1,+\infty)$$

β) Έχουμε $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x},\ x\in(1,+\infty)$

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{\ln x}\right)'=\frac{e^x\ln x-e^x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{e^x(x\ln x-1)}{x(\ln x)^2}=\frac{e^x h(x)}{x(\ln x)^2}\ ,\ x>1$$

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και έχει μοναδική ρίζα την $\xi\in(\kappa,\lambda)\subseteq(1,+\infty)$, οπότε έχουμε:

- για $1<x<\xi\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)<h(\xi)\Rightarrow h(x)<0$ και
- για $x>\xi\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)>h(\xi)\Rightarrow h(x)>0$

Επίσης είναι $e^x > 0$ και $x(\ln x)^2 > 0$, οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	1		ξ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\xi)$	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(e^x \cdot \dfrac{1}{\ln x}\right) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} \overset{u=\ln x}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^x)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} (e^x \cdot x) = +\infty$

ii) Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x) = x\ln x \cdot f(x) - x\ln x \cdot f'(x) \Leftrightarrow f(x) + x\ln x \cdot f'(x) = x\ln x \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x\ln x \cdot f(x) \Leftrightarrow g(x) = x\ln x \cdot \frac{e^x}{\ln x} \Leftrightarrow g(x) = xe^x > 0$$

Είναι:

$$E(\alpha) = \int_2^\alpha g(x)dx = \int_2^\alpha x\,e^x dx = \int_2^\alpha x\,(e^x)'\,dx = \left[x\,e^x\right]_2^\alpha - \int_2^\alpha (x)'e^x dx =$$

$$= \alpha e^\alpha - 2e^2 - \int_2^\alpha e^x dx = \alpha e^\alpha - 2e^2 - \left[e^x\right]_2^\alpha = \alpha e^\alpha - 2e^2 - (e^\alpha - e^2) = (\alpha-1)e^\alpha - e^2$$

Είναι:

- $\lim\limits_{\alpha\to +\infty} E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to +\infty}\left[(\alpha-1)e^\alpha - e^2\right] = +\infty$, αφού

  $\lim\limits_{\alpha\to +\infty} e^\alpha = +\infty$ και $\lim\limits_{\alpha\to +\infty} (\alpha-1) = \lim\limits_{\alpha\to +\infty} \alpha = +\infty$

Επομένως $\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\left(E(\alpha)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{E(\alpha)}\right) \overset{u=E(\alpha)}{=} \lim\limits_{u\to +\infty}\left(u\cdot\eta\mu\dfrac{1}{u}\right) \overset{\frac{1}{u}=t}{=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\eta\mu t}{t} = 1$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,2e)$. Αν η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0+1\,,\,2e^{x_0})$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{2-x}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha} + \dfrac{f(2x)}{x-\beta} = 2016$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και την ευθεία $y = e^2+1$

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$

ΛΥΣΗ

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $\left(x_0, f(x_0)\right)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από το σημείο Α, επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου αυτού.

Επομένως έχουμε:

$$2e^{x_0} - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x_0 + 1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$2e^{x_0} - f(x_0) = f'(x_0) \Leftrightarrow 2e^{x_0} = f'(x_0) + f(x_0) \quad (1)$$

Θέτουμε στην (1) όπου x_0 το x, αφού η (1) ισχύει για κάθε $x_0 \in R$ και έχουμε:

$$2e^{x} = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(e^x f(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow e^x f(x) = e^{2x} + c$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$e\cdot f(1) = e^2 + c \Leftrightarrow 2e^2 = e^2 + c \Leftrightarrow c = e^2$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$e^x f(x) = e^{2x} + e^2 \Leftrightarrow f(x) = e^x + e^{2-x},\ x \in R$$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = e^x - e^{2-x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{2-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{2-x} \Leftrightarrow x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{2-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{2-x} \Leftrightarrow x > 2 - x \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$2e$	↗

Ελάχιστο

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = 2e$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + e^{2-x}) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2-x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + e^{2-x}) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2-x} = 0$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι: $f(R) = [2e, +\infty)$

γ) Για κάθε $x \in R - \{\alpha, \beta\}$ είναι:

$$\frac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha} + \frac{f(2x)}{x-\beta} = 2016 \Leftrightarrow (x-\beta)f(\alpha-2x) + (x-\alpha)f(2x) = 2016(x-\alpha)(x-\beta) \Leftrightarrow$$

$$(x-\beta)f(\alpha-2x) + (x-\alpha)f(2x) - 2016(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-\beta)f(\alpha-2x) + (x-\alpha)f(2x) - 2016(x-\alpha)(x-\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$

Για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- $g(\alpha)\cdot g(\beta) = (\alpha-\beta)f(-\alpha)\cdot(\beta-\alpha)f(2\beta) = -(\alpha-\beta)^2 f(-\alpha)f(2\beta) < 0$, αφού $f(-\alpha) > 0$ και $f(2\beta) > 0$, όπως προκύπτει από το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi-\beta)f(\alpha-2\xi) + (\xi-\alpha)f(2\xi) - 2016(\xi-\alpha)(\xi-\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\xi-\beta)f(\alpha-2\xi) + (\xi-\alpha)f(2\xi) = 2016(\xi-\alpha)(\xi-\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha-2\xi)}{\xi-\alpha} + \frac{f(2\xi)}{\xi-\beta} = 2016$$

Επομένως η εξίσωση $\frac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha} + \frac{f(2x)}{x-\beta} = 2016$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α, β)

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = e^2 + 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + e^{2-x} = e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + \frac{e^2}{e^x} = e^2 + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - (e^2+1)e^x + e^2 = 0 \overset{e^x = \omega}{\Leftrightarrow}$$

$$\omega^2 - (e^2+1)\omega + e^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = e^2 \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ή } e^x = e^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Είναι:

$$f(x) \le e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + e^{2-x} \le e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + \frac{e^2}{e^x} \le e^2 + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - (e^2+1)e^x + e^2 \le 0 \overset{e^x = \omega}{\Leftrightarrow}$$

$$\omega^2 - (e^2+1)\omega + e^2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le \omega \le e^2 \Leftrightarrow 1 \le e^x \le e^2 \Leftrightarrow e^0 \le e^x \le e^2 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και την ευθεία $y = e^2 + 1$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^2 \left| e^2 + 1 - f(x) \right| dx = \int_0^2 \left(e^2 + 1 - (e^x + e^{2-x}) \right) dx = \int_0^2 (e^2+1)dx - \int_0^2 e^x dx - \int_0^2 e^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 (e^2+1)dx - \int_0^2 e^x dx + \int_0^2 e^{2-x}(2-x)' dx = (e^2+1)(2-0) - \left[e^x \right]_0^2 + \left[e^{2-x} \right]_0^2 =$$

$$= 2(e^2+1) - (e^2 - e^0) + (e^0 - e^2) = 2e^2 + 2 - e^2 + 1 + 1 - e^2 = 4$$

ε) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(1+x_0)=f(1-x_0)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x_0

Πράγματι:

$$f(1+x_0)=e^{1+x_0}+e^{2-1-x_0}=e^{1+x_0}+e^{1-x_0} \quad \text{και}$$

$$f(1-x_0)=e^{1-x_0}+e^{2-1+x_0}=e^{1-x_0}+e^{1+x_0}$$

ΘΕΜΑ 13ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με $f(x)=(1-x)\ln x+\frac{1}{2}$ και $g(x)=\frac{x^2\ln x}{e^{2x}}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο μόνο ρίζες $\rho_1\in(0,1)$ και $\rho_2\in(1,+\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-\ln(\rho_1\rho_2)$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

ΛΥΣΗ

α) 1ος Τρόπος:

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=(1-x)'\ln x+(1-x)(\ln x)'=-\ln x+\frac{1-x}{x}=-\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)$$

- Αν $x\in(0,1)$ είναι $\ln x<0$ και $\frac{x-1}{x}<0$, οπότε $f'(x)>0$
- Αν $x\in(1,+\infty)$ είναι $\ln x>0$ και $\frac{x-1}{x}>0$, οπότε $f'(x)<0$
- Αν $x=1$ είναι $f'(x)=0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	
			Μέγιστο		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ με μέγιστη τιμή $f(1)=\frac{1}{2}$

2ος Τρόπος:

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=(1-x)'\ln x+(1-x)(\ln x)'=-\ln x+\frac{1-x}{x}=-\ln x+\frac{1}{x}-1$$

Προφανής λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι η $x=1$ και επειδή $f''(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}<0$ η συνάρτηση η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Είναι:

- Αν $0<x<1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0$
- Αν $x>1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0$
- Αν $x=1$ είναι $f'(x)=0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	
			Μέγιστο		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0\,,1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1\,,+\infty\right)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=1$ με μέγιστη τιμή $f(1)=\frac{1}{2}$

β) 1^{ος} Τρόπος:

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left((1-x)\ln x+\frac{1}{2}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$, άρα θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(0\,,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\alpha)$, οπότε $f(\kappa)<0$ για $\kappa\in(1,\alpha)$
- $f(1)=\frac{1}{2}>0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\kappa\,,1\right]$ και $f(\kappa)\cdot f(1)<0$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1\in(\kappa\,,1)\subseteq(0\,,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1)=0$, το οποίο είναι μοναδικό στο διάστημα αυτό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((1-x)\ln x+\frac{1}{2}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$, άρα θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\beta\,,+\infty)$ με $\beta>\alpha$ τέτοιο, ώστε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\beta,+\infty)$, οπότε $f(\lambda)<0$ για $\lambda\in(\beta\,,+\infty)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,\,\lambda\right]$ και $f(1)\cdot f(\lambda)<0$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2\in(1,\lambda)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_2)=0$, το οποίο είναι μοναδικό στο διάστημα αυτό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο μόνο ρίζες τις $\rho_1\in(0\,,1)$ και $\rho_2\in(1\,,+\infty)$

2^{ος} Τρόπος:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=\left(0\,,1\right)$, επομένως είναι:

$$f\left(\Delta_1\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\ \lim_{x\to 1^-}f(x)\right)=\left(-\infty\,,\ \frac{1}{2}\right),\quad \text{αφού}\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty \quad \text{και}\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\frac{1}{2}$$

Το $0\in f\left(\Delta_1\right)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ_1 στο διάστημα $\Delta_1=\left(0\,,1\right)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=\left(1,+\infty\right)$, επομένως είναι:

$$f\left(\Delta_2\right)=\left(\lim_{x\to +\infty}f(x),\ \lim_{x\to 1^+}f(x)\right)=\left(-\infty\,,\ \frac{1}{2}\right),\quad \text{αφού}\quad \lim_{x\to +\infty}f(x)=-\infty \quad \text{και}\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\frac{1}{2}$$

Το $0\in f\left(\Delta_2\right)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ_2 στο διάστημα $\Delta_2=\left(1,+\infty\right)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο μόνο ρίζες, τις $\rho_1\in(0\,,1)$ και $\rho_2\in(1\,,+\infty)$

γ) Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\rho_1\,,1\right]$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $\left[\rho_1\,,1\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1\,,1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\rho_1\,,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(\rho_1)}{1-\rho_1}=\frac{\frac{1}{2}-0}{1-\rho_1}=\frac{1}{2(1-\rho_1)} \qquad (1)$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[1,\rho_2\right]$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $\left[1,\rho_2\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(1\,,\rho_2)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(1\,,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\rho_2)-f(1)}{\rho_2-1}=\frac{0-\frac{1}{2}}{\rho_2-1}=\frac{1}{2(1-\rho_2)} \qquad (2)$$

Είναι:

- $f(\rho_1)=0\Rightarrow(1-\rho_1)\ln\rho_1+\frac{1}{2}=0\Rightarrow(1-\rho_1)\ln\rho_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2(1-\rho_1)}=-\ln\rho_1$ και
- $f(\rho_2)=0\Rightarrow(1-\rho_2)\ln\rho_2+\frac{1}{2}=0\Rightarrow(1-\rho_2)\ln\rho_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2(1-\rho_2)}=-\ln\rho_2$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\frac{1}{2(1-\rho_1)}+\frac{1}{2(1-\rho_2)}=-\ln\rho_1-\ln\rho_2=-(\ln\rho_1+\ln\rho_2)=-\ln(\rho_1\rho_2)$$

δ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g'(x)=\left(\frac{x^2\ln x}{e^{2x}}\right)'=\frac{(2x\ln x+x)e^{2x}-2e^{2x}x^2\ln x}{(e^{2x})^2}=\frac{2x\ln x+x-2x^2\ln x}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{x(2\ln x+1-2x\ln x)}{e^{2x}}=\frac{2x\left((1-x)\ln x+\frac{1}{2}\right)}{e^{2x}}=\frac{2x\,f(x)}{e^{2x}}$$

Είναι:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x\,f(x)}{e^{2x}}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)=0\Leftrightarrow x=\rho_1$ ή $x=\rho_2$ και
- $g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2x\,f(x)}{e^{2x}}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)>0\Rightarrow x\in(\rho_1,\rho_2)$

αφού: $0<x<\rho_1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)<f(\rho_1)\Rightarrow f(x)<0$

$\rho_1<x\le 1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)>f(\rho_1)\Rightarrow f(x)>0$

$1\le x<\rho_2\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(x)>f(\rho_2)\Rightarrow f(x)>0$

$x>\rho_2\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(x)<f(\rho_2)\Rightarrow f(x)<0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο ρ_1 και ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο ρ_2

ΘΕΜΑ 14ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$f'(x)=4f(x)+32x^2-16x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{4x}-8x^2$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $4f(2x)<3f(x)+f(5x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

δ) Να αποδείξετε ότι $(e^2-2)\ln 2<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<(e^4-8)\ln 2$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(x-1)\big(3f(x)+f(5x)-4f(2x)\big)=(e^{4x}-2)\ln 4x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 4f(x) + 32x^2 - 16x \Rightarrow f'(x) + 16x = 4f(x) + 32x^2 \Rightarrow$$

$$\left(f(x) + 8x^2\right)' = 4\left(f(x) + 8x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 4g(x) \quad (1), \text{ όπου } g(x) = f(x) + 8x^2 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με e^{-4x}, οπότε έχουμε:

$$g'(x)e^{-4x} = 4e^{-4x}g(x) \Rightarrow g'(x)e^{-4x} - 4e^{-4x}g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$g'(x)e^{-4x} + \left(e^{-4x}\right)' g(x) = 0 \Rightarrow \left(g(x)e^{-4x}\right)' = 0 \Rightarrow g(x)e^{-4x} = c \Rightarrow g(x) = ce^{4x} \quad (3)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε $g(0) = f(0) + 8 \cdot 0^2 = f(0) = 1$

Για $x = 0$ από τη σχέση (3) έχουμε $g(0) = ce^0 \Leftrightarrow c = 1$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι $g(x) = e^{4x}$ (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) για κάθε $x \in R$ είναι $e^{4x} = f(x) + 8x^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{4x} - 8x^2$

Επομένως:

$$f(x) = e^{4x} - 8x^2, \quad x \in R$$

β) Για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ ισχύει $\ln\alpha \le \alpha - 1$ (6)

Αν στη σχέση (6) θέσουμε όπου α το e^{4x}, είναι $e^{4x} > 0$ για κάθε $x \in R$, τότε έχουμε:

$$\ln e^{4x} \le e^{4x} - 1 \Leftrightarrow 4x \le e^{4x} - 1 \Leftrightarrow e^{4x} - 4x \ge 1, \text{ οπότε } e^{4x} - 4x > 0, \ x \in R \quad (7)$$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f'(x) = 4\left(e^{4x} - 4x\right) \overset{(7)}{\Rightarrow} f'(x) > 0, \ x \in R$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

γ) Έστω τυχαίο $x > 0$, τότε είναι $0 < x < 2x < 5x$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x, 2x]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[x, 2x]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = \left(e^{4x} - 8x^2\right)' = e^{4x}(4x)' - 16x = 4e^{4x} - 16x \quad (5)$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 2x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[2x, 5x]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[2x, 5x]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(2x, 5x)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = \left(e^{4x} - 8x^2\right)' = e^{4x}(4x)' - 16x = 4e^{4x} - 16x$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2x\,,5x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(5x)-f(2x)}{5x-2x}=\frac{f(5x)-f(2x)}{3x}$$

Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:

$$f''(x)=\left(4e^{4x}-16x\right)'=4e^{4x}(4x)'-16=16e^{4x}-16=16(e^{4x}-1)>0$$

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\,,+\infty)$

Επειδή $\xi_1,\xi_2\in(0\,,+\infty)$ και $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow \dfrac{f(2x)-f(x)}{x}<\dfrac{f(5x)-f(2x)}{3x} \overset{x>0}{\Rightarrow}$

$$f(2x)-f(x)<\frac{f(5x)-f(2x)}{3} \Rightarrow 3f(2x)-3f(x)<f(5x)-f(2x) \Rightarrow 4f(2x)<3f(x)+f(5x)$$

δ) Για κάθε $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ ισχύει:

$$\frac{1}{2}<t\le 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(t)\le f(1) \Rightarrow e^2-2\le f(t)\le e^4-8 \overset{t>0}{\Rightarrow} \frac{e^2-2}{t}\le\frac{f(t)}{t}\le\frac{e^4-8}{t}$$

Το «ίσον» δεν ισχύει παντού στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, οπότε είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^2-2}{t}dt<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^4-8}{t}dt \Rightarrow (e^2-2)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<(e^4-8)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt \qquad (8)$$

Είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\ln1-\ln\frac{1}{2}=\ln1-(\ln1-\ln2)=\ln2$$

Άρα από τη σχέση (8) έχουμε:

$$(e^2-2)\ln2<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<(e^4-8)\ln2$$

ε) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$2x\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(x-1)\big(3f(x)+f(5x)-4f(2x)\big)-(e^{4x}-2)\ln4x=0 \Leftrightarrow \varphi(x)=0,$$

όπου

$$\varphi(x)=2x\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(x-1)\big(3f(x)+f(5x)-4f(2x)\big)-(e^{4x}-2)\ln4x\,,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$

Είναι:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt+\frac{1}{2}\left(3f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)-4f(1)\right)-(e^2-2)\ln 2 \quad (9)$$

Από το ερώτημα (δ) είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt>(e^2-2)\ln 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(e^2-2)\ln 2>0$$

και από το ερώτημα (γ) για $x=\frac{1}{2}$ είναι:

$$4f(1)<3f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow 3f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)-4f(1)>0,$$

οπότε από τη σχέση (9) έχουμε:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)>0$$

Είναι:

$$\varphi(1)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(e^4-2)\ln 4 \quad (10)$$

Από το ερώτημα (δ) είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<(e^4-8)\ln 2<(e^4-2)\ln 2\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(e^4-2)\ln 2<0,$$

οπότε από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\varphi(1)<0$$

Για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\varphi(1)<0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$, άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

ΘΕΜΑ 15ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x}{x-1}=0$
- $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)-x^2-y^2+1$ **για κάθε** $x,y\in R^*$ **(1)**

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=1$

β) Να αποδείξετε ότι $xf'(x)-2f(x)=x^2-2$, για κάθε $x\in R^*$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+1\ , & x\neq 0 \\ 1 & , x=0\end{cases}$

δ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f

ε) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες η εξίσωση $2ex^2\ln|x|=\alpha$ έχει 4 διαφορετικές ρίζες.

ΛΥΣΗ

α) Για $x=y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε $f(1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)-1-1+1 \Leftrightarrow f(1)=1$ (2)

Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1-x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}\right)\overset{(2)}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-1\right)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-1=f'(1)-1$$

Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x-1}=0\Leftrightarrow f'(1)-1=0\Leftrightarrow f'(1)=1$$

β) Για κάθε $x,y\in R^*$ είναι:

$$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)-x^2-y^2+1 \quad (1)$$

Θεωρώντας το x ως μεταβλητή παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\big(f(yx)\big)'=\left(y^2f(x)+x^2f(y)-x^2-y^2+1\right)'\Leftrightarrow f'(yx)\cdot y=y^2f'(x)+2xf(y)-2x$$

Για $x=1$ από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$y\cdot f'(y)=y^2f'(1)+2\cdot 1\cdot f(y)-2\cdot 1\overset{f'(1)=1}{\Leftrightarrow} y\cdot f'(y)=y^2+2f(y)-2$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $y\in R^*$, επομένως για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$xf'(x)=x^2+2f(x)-2\Leftrightarrow x\cdot f'(x)-2f(x)=x^2-2$$

γ) Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$xf'(x)-2f(x)=x^2-2\overset{\cdot x}{\Rightarrow}x^2f'(x)-2xf(x)=x^3-2x\overset{\div x^4}{\Rightarrow}\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(\ln|x|-2\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)'\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(\ln|x|+\frac{1}{x^2}\right)'\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x^2}=\begin{cases} \ln|x|+\dfrac{1}{x^2}+c_1 \ , \ x<0 \\ \ln|x|+\dfrac{1}{x^2}+c_2 \ , \ x>0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+1+c_1x^2 \ , \ x<0 \\ x^2\ln|x|+1+c_2x^2 \ , \ x>0 \end{cases}$$

(αφού οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ. ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων)

Η συνάρτηση f ορίζεται και στο 0, αφού είναι συνεχής στο R, οπότε έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+1+c_1x^2 \ , \ x<0 \\ f(0) \ , \ x=0 \\ x^2\ln|x|+1+c_2x^2 \ , \ x>0 \end{cases} \qquad (5)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (5) έχουμε $f(1)=1^2\cdot\ln1+1+c_2\cdot1^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1=0+1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$

Για $x=y=-1$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(1)=(-1)^2\cdot f(-1)+(-1)^2\cdot f(-1)-(-1)^2-(-1)^2+1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1=2f(-1)-1 \Leftrightarrow f(-1)=1 \quad (6)$$

Για $x=y=-1$ από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f(-1)=(-1)^2\cdot\ln1+1+c_2\cdot(-1)^2 \overset{(6)}{\Leftrightarrow} 1=0+1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$$

Άρα έχουμε $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+1 \ , \ x<0 \\ f(0) \ , \ x=0 \\ x^2\ln|x|+1 \ , \ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+1 \ , \ x\neq0 \\ f(0) \ , \ x=0 \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, οπότε έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to0}\left(x^2\ln|x|+1\right)\Rightarrow f(0)=0+1\Rightarrow f(0)=1 \ , \ \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to0}\left(x^2\ln|x|\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{x^{-2}} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{\left(\ln|x|\right)'}{\left(x^{-2}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$$

Επομένως έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+1 \ , \ x\neq0 \\ 1 \ , \ x=0 \end{cases}$$

δ) Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^2\ln|x|+1\right)'=2x\ln|x|+x^2\frac{1}{x}=2x\ln|x|+x=x\left(2\ln|x|+1\right)$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\left(2\ln|x|+1\right)=0 \overset{x\neq0}{\Leftrightarrow} \ln|x|=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |x|=e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\pm e^{-\frac{1}{2}}$ και
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\left(2\ln|x|+1\right)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \ \ \text{και} \ \ 2\ln|x|+1>0 \\ x<0 \ \ \text{και} \ \ 2\ln|x|+1<0 \end{cases}$

- Αν $x>0$ τότε είναι $\ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$
- Αν $x<0$ τότε είναι $\ln(-x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x < e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > -e^{-\frac{1}{2}}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$-e^{-\frac{1}{2}}$		0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		↗		↘		↗	
		Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα σημεία $x_1 = -e^{-\frac{1}{2}}$ και $x_3 = e^{-\frac{1}{2}}$ με τιμή $f\left(\pm e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1}\ln e^{-\frac{1}{2}} + 1 = 1 - \frac{1}{2e}$ τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_2 = 0$ με τιμή $f(0)=1$

ε) Είναι:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2\ln|x|+1\right) = +\infty$$

Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$2ex^2\ln|x| = \alpha \Leftrightarrow x^2\ln|x| = \frac{\alpha}{2e} \Leftrightarrow x^2\ln|x|+1 = \frac{\alpha}{2e}+1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\alpha}{2e}+1 \quad (7) \text{ με } x\neq 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (7) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της ευθείας $\varepsilon: y = \frac{\alpha}{2e}+1$, που είναι παράλληλη με τον άξονα $x΄x$. Η εξίσωση (7) έχει 4 διαφορετικές ρίζες αν και μόνο αν η ευθεία (ε) τέμνει την C_f σε 4 διαφορετικά σημεία, δηλαδή αν και μόνο αν

$$1-\frac{1}{2e} < \frac{\alpha}{2e}+1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2e} < \frac{\alpha}{2e} < 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 0$$

Άρα η εξίσωση $2ex^2\ln|x| = \alpha$ έχει 4 διαφορετικές ρίζες όταν $\alpha \in (-1,0)$

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$
- $4f^2(x) - 4xf(x) = \alpha x + \beta$ **για κάθε** $x\in R$ **, όπου** $\beta > \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(1) < 0$ να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+x+\beta}}{2}$

ii) Η εξίσωση $10xf(x) = 3\eta\mu(\pi x) - 3x + 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,+\infty)$

ΛΥΣΗ

α) Για $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$4f^2(x)-4x\,f(x)=\alpha x+\beta \Leftrightarrow \frac{4}{x}f^2(x)-4f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x} \quad (1)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{4}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}f^2(x)-4f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)^2-4\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\beta}{x}\right)\Rightarrow$$

$$0\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\alpha+0\Leftrightarrow\alpha=1$$

β) Για $\alpha=1$ η δοθείσα σχέση γράφεται $4f^2(x)-4x\,f(x)=x+\beta \quad (2)$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε τα μέλη της ισότητας (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, επομένως έχουμε:

$$\left(4f^2(x)-4x\,f(x)\right)'=\left(x+\beta\right)' \Leftrightarrow 8f(x)f'(x)-4f(x)-4x\,f'(x)=1 \quad (3)$$

Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0\in R$. Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του R και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο R), άρα από Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0)=0$

Για $x=x_0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$8f(x_0)f'(x_0)-4f(x_0)-4x_0\,f'(x_0)=1\Leftrightarrow 8f(x_0)\cdot 0-4f(x_0)-4x_0\cdot 0=1\Rightarrow f(x_0)=-\frac{1}{4} \quad (4)$$

Για $x=x_0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$4f^2(x_0)-4x_0\,f(x_0)=x_0+\beta \overset{(4)}{\Rightarrow} 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2-4x_0\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=x_0+\beta\Rightarrow\frac{1}{4}+x_0=x_0+\beta\Rightarrow\beta=\frac{1}{4}$$

που είναι άτοπο αφού $\beta>\frac{1}{4}$. Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

γ) **i)** Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$4f^2(x)-4x\,f(x)=x+\beta\Leftrightarrow 4f^2(x)-4x\,f(x)+x^2=x^2+x+\beta\Leftrightarrow$$

$$\left(2f(x)-x\right)^2=x^2+x+\beta\Leftrightarrow g^2(x)=x^2+x+\beta \quad (5),\ \text{όπου } g(x)=2f(x)-x \quad (6)$$

Το τριώνυμο $x^2+x+\beta$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1-4\beta<0$, αφού $\beta>\frac{1}{4}$, άρα $x^2+x+\beta>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε $g^2(x)>0\Rightarrow g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Επίσης η συνάρτηση g είναι συνεχής στο R, επομένως διατηρεί πρόσημο στο R με $g(1)=2f(1)-1<0$, αφού $f(1)<0$

Άρα για κάθε $x\in R$ είναι $g(x)<0$ οπότε από τη σχέση (5) έχουμε $g(x)=-\sqrt{x^2+x+\beta}\overset{(6)}{\Leftrightarrow}$

$$2f(x)-x=-\sqrt{x^2+x+\beta}\Leftrightarrow 2f(x)=x-\sqrt{x^2+x+\beta}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+x+\beta}}{2},\ x\in R$$

ii) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=10x\,f(x)-3ημ(πx)+3x-4$, $x\in[1,+\infty)$

Είναι:

- $h(1)=10f(1)-3ημπ+3-4=10f(1)-1<0$, αφού $f(1)<0$
- Για $x\in[1,+\infty)$ είναι $h(x)=x\left(10f(x)-\frac{3}{x}ημ(πx)+3-\frac{4}{x}\right)$ (7)

Έχουμε:

$$\left|\frac{3}{x}ημ(πx)\right|=\frac{3}{|x|}\cdot|ημ(πx)|\le\frac{3}{|x|}\Rightarrow-\frac{3}{|x|}\le\frac{3}{x}ημ(πx)\le\frac{3}{|x|}\Rightarrow-\frac{3}{x}\le\frac{3}{x}ημ(πx)\le\frac{3}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}ημ(πx)\right)=0$

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{1}{4}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(10f(x)-\frac{3}{x}ημ(πx)+3-\frac{4}{x}\right)=10\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-0+3-0=\frac{1}{2}$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(10f(x)-\frac{3}{x}ημ(πx)+3-\frac{4}{x}\right)\right]=+\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(γ,+\infty)$ με $γ>1$ τέτοιο, ώστε $h(x)>0$ για κάθε $x\in(γ,+\infty)$, οπότε $h(λ)>0$ για $λ\in(γ,+\infty)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,λ]$, αφού η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,λ]$ και $h(1)h(λ)<0$. Άρα θα υπάρχει ένα $ρ\in(1,λ)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(ρ)=0$

Δηλαδή η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $ρ\in(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 17ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-x\right)$, $x\in R$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\left(x_1,f(x_1)\right)$, $B\left(x_2,f(x_2)\right)$ και το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι συνευθειακά.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\left(e^{x^2}(x^3-x)\right)'=(e^{x^2})'(x^3-x)+e^{x^2}(x^3-x)'=$$
$$=2xe^{x^2}(x^3-x)+e^{x^2}(3x^2-1)=e^{x^2}(2x^4+x^2-1)\text{ , } x\in R$$

Έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}(2x^4+x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2x^4+x^2-1=0$, διότι $e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

  $\overset{x^2=y\ge 0}{\Leftrightarrow} 2y^2+y-1=0 \Leftrightarrow \left(y=\frac{1}{2} \text{ δεκτή ή } y=-1 \text{ (απορρίπτεται, διότι } y\ge 0)\right)$

  Είναι $y=\frac{1}{2}$, οπότε έχουμε:

  $$x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x^2}\left(2x^4+x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow 2x^4+x^2-1>0$, διότι $e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

  $\overset{x^2=y\ge 0}{\Leftrightarrow} 2y^2+y-1>0 \Leftrightarrow \left(y>\frac{1}{2} \text{ δεκτή ή } y<-1 \text{ (απορρίπτεται, διότι } y\ge 0)\right)$

  Είναι $y>\frac{1}{2}$, οπότε έχουμε:

  $$x^2>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |x|>\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f'(x)>0$ στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f'(x)<0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f'(x)>0$ στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

♦ Η συνάρτηση f παρουσιάζει για:

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ τοπικό μέγιστο το } f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{2e}}{4}$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ τοπικό ελάχιστο το } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{\sqrt{2e}}{4}$$

β) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x)=\left(e^{x^2}(2x^4+x^2-1)\right)'=\left(e^{x^2}\right)'(2x^4+x^2-1)+e^{x^2}(2x^4+x^2-1)'=$$

$$=2xe^{x^2}(2x^4+x^2-1)+e^{x^2}(8x^3+2x)=2xe^{x^2}(2x^4+5x^2)=2x^3e^{x^2}(2x^2+5),\ x\in R$$

Έχουμε:

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3e^{x^2}(2x^2+5)=0 \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0,$ διότι $2e^{x^2}(2x^2+5)>0$ για κάθε $x\in R$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2x^3e^{x^2}(2x^2+5)>0 \Leftrightarrow x^3>0 \Leftrightarrow x>0,$ διότι $2e^{x^2}(2x^2+5)>0$ για κάθε $x\in R$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$
		Σ.Κ.	

Είναι:

♦ Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,\ 0]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x)<0$ στο $(-\infty,\ 0)$

♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,\ +\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x)>0$ στο $(0,\ +\infty)$

♦ Η f'' μηδενίζεται στο $x_0=0$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $O(0, f(0))$, δηλαδή το $O(0,\ 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ) Οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f είναι:

$$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε } A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2e}}{4}\right) \text{ και } B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2e}}{4}\right)$$

Το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι το $O(0,0)$

Είναι:

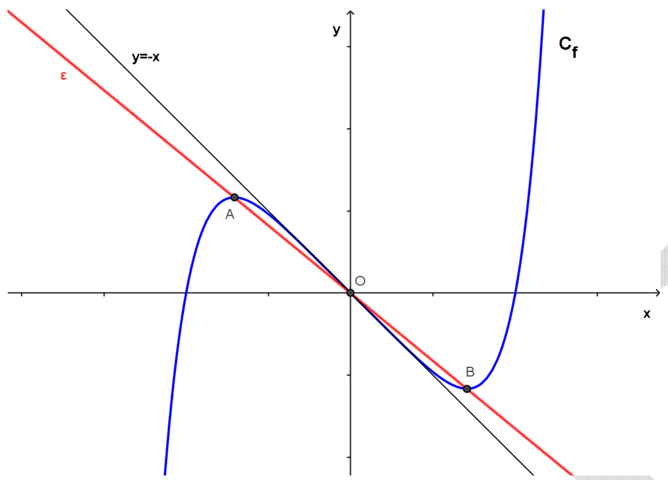
■ $\lambda_{\overrightarrow{OA}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2e}}{4}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ και ■ $\lambda_{\overrightarrow{OB}}=\dfrac{-\frac{\sqrt{2e}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

Δηλαδή:

$\lambda_{\overrightarrow{OA}}=\lambda_{\overrightarrow{OB}}$, οπότε $\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{OB}$

Άρα τα σημεία Α, Ο, Β είναι συνευθειακά.

Σημείωση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την ισοδυναμία: $\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=0$



δ) 1^{ος} Τρόπος:

Η ευθεία με εξίσωση $y=-x$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο καμπής της O(0,0), διότι $f(0)=0$ και $f'(0)=-1$

Η εξίσωση $f(x)=-x$, $x \in R$ έχει προφανή ρίζα το 0

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f(x)>-x,$$

διότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, άρα η εφαπτομένη βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $(0,+\infty)$

Για κάθε $x<0$ είναι:

$$f(x)<-x,$$

διότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$, άρα η εφαπτομένη βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $(-\infty,0)$

Άρα η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα το 0

2^{ος} Τρόπος: Υπόδειξη

Είναι:

$$f(x)=-x \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3-x)=-x \Leftrightarrow x\left(e^{x^2}(x^2-1)+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0,$$

διότι η συνάρτηση $\varphi(x)=e^{x^2}(x^2-1)+1$, $x \in R$ για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $\varphi(0)=0$

ε) Είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3-x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και ισχύει:

$$f(x)\geq 0, \text{ για κάθε } x\in[-1,0] \quad \text{και} \quad f(x)\leq 0, \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

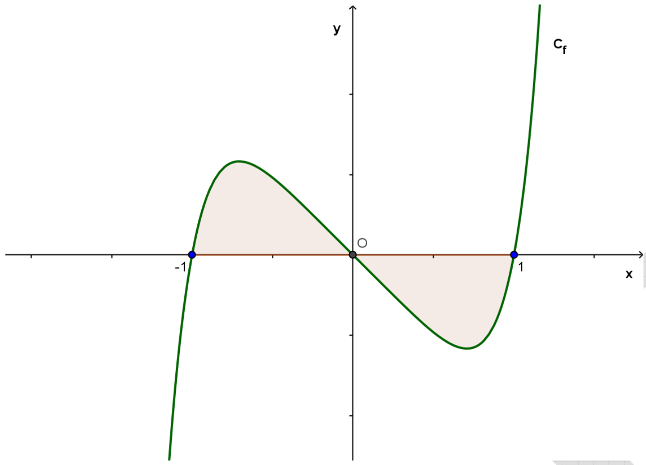
$$E=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}-f(x)dx=-2\int_{0}^{1}f(x)dx,$$

διότι για το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{0}f(x)dx$, $\left(\begin{array}{l}\text{θέτουμε}: x=-u, \text{ τότε } dx=(-u)'du=-du \\ \text{Για } x=-1 \text{ είναι } u=1 \text{ και για } x=0 \text{ είναι } u=0\end{array}\right)$

και έχουμε:

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=-\int_{1}^{0}f(-u)du=\int_{0}^{1}f(-u)du=-\int_{0}^{1}f(u)du=-\int_{0}^{1}f(x)dx,$$

επειδή $f(-u)=-f(u)$ για κάθε $u\in R$



Έχουμε:

$$E=-2\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 2xe^{x^2}(x^2-1)dx=-\int_0^1 (e^{x^2})'(x^2-1)dx=$$

$$=-\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]_0^1+\int_0^1 e^{x^2}(x^2-1)'dx=-\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]_0^1+\int_0^1 2xe^{x^2}dx=$$

$$=-\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]_0^1+\int_0^1 (x^2)'e^{x^2}dx=-\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]_0^1+\int_0^1 (e^{x^2})'dx=$$

$$=-\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]_0^1+\left[e^{x^2}\right]_0^1=-(0-(-1))+(e-1)=e-2$$

ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$0\le f(x)+16\le (x+1)f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)**
- **$f(1)=0$**
- **Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$**

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x-x)=f(x^2-x+2)$

γ) Να αποδείξετε ότι $(1+x)f(x)<f(x^2)$ για κάθε $x\in(\rho\,,\,1)$, όπου ρ ρίζα της εξίσωσης του (β) ερωτήματος.

δ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$, τότε να αποδείξετε ότι $16<E<32$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) για $x=-1$ έχουμε:

$$0\le f(-1)+16\le 0\Rightarrow f(-1)+16=0\Rightarrow f(-1)=-16$$

Από τη σχέση (1) επίσης έχουμε:

$$f(x)\ge -16=f(-1) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Δηλαδή η συνάρτηση f στο εσωτερικό σημείο $x_0=-1$ του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ελάχιστο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Fermat, οπότε ισχύει $f'(-1)=0$

Έχουμε:

- Για κάθε $x > -1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(-1) \Rightarrow f'(x) > 0$

  Δηλαδή είναι $f\,'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, +\infty)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$

- Για κάθε $x < -1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(-1) \Rightarrow f'(x) < 0$

  Δηλαδή είναι $f\,'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, -1]$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$

- Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = -1$ με ελάχιστη τιμή $f(-1) = -16$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \le x - 1$ και θέτοντας όπου x το e^x έχουμε:

$$\ln e^x \le e^x - 1 \Rightarrow x \le e^x - 1 \Rightarrow e^x - x \ge 1 \Rightarrow e^x - x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$2e^x - x = e^x + (e^x - x) > 0 \qquad \text{και} \qquad x^2 - x + 2 > 0,$$

οπότε έχουμε:

$$f(2e^x - x) = f(x^2 - x + 2) \Leftrightarrow 2e^x - x = x^2 - x + 2 \qquad (3),$$

διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty) \subseteq [-1, +\infty)$ άρα είναι και «$1-1$»

Από τη σχέση (3) ισοδύναμα έχουμε:

$$2e^x - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(0) \quad (4), \text{ όπου } \varphi(x) = 2e^x - x^2 - 2,\ x \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\varphi'(x) = (2e^x - x^2 - 2)' = 2e^x - 2x = 2(e^x - x) > 0$$

Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και «$1-1$»

Από τη σχέση (4) έχουμε $\varphi(x) = \varphi(0) \overset{\varphi\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$

γ) Για $\rho = 0$ έχουμε ότι $x \in (0, 1)$. Είναι $0 < x < 1 \overset{\cdot x}{\Rightarrow} x^2 < x$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x^2, x]$ με $x \in (0, 1)$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[x^2, x]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο (x^2, x), αφού είναι παραγωγίσιμη στο R

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x^2, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2} = \dfrac{f(x) - f(x^2)}{x(1-x)}$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x, 1]$ με $x \in (0, 1)$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[x, 1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x} \overset{f(1)=0}{=} \dfrac{-f(x)}{1-x}$

Είναι:

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x^2)}{x(1-x)} < \frac{-f(x)}{1-x} \overset{1-x>0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{f(x)-f(x^2)}{x} < -f(x) \overset{x>0}{\Rightarrow} f(x)-f(x^2) < -xf(x) \Rightarrow (1+x)f(x) < f(x^2)$$

Άρα για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει ότι $(1+x)f(x) < f(x^2)$

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, ως παραγωγίσιμη στο R

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1] \subseteq [-1,+\infty)$, οπότε για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε:

$$-1 \le x \le 1 \overset{f\uparrow[-1,+\infty)}{\Rightarrow} f(x) \le f(1) \Rightarrow f(x) \le 0$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$ είναι:

$$E = -\int_{-1}^{1} f(x)dx \quad (5)$$

Για τις συνεχείς συναρτήσεις της ανισότητας (1) έχουμε:

- $f(x)+16 \ge 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=-1$

  Άρα:

$$\int_{-1}^{1} \big(f(x)+16\big)dx > 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} 16dx > 0 \Rightarrow -\int_{-1}^{1} f(x)dx < 32 \overset{(5)}{\Rightarrow} E < 32 \quad (6)$$

- $(x+1)f'(x)-f(x)-16 \ge 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=-1$, διότι $(x+1)f'(x)-f(x)-16 > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1]$

  Πράγματι:

  Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, x]$ ισχύουν:

  Είναι συνεχής στο $[-1, x]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R

  Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, x)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R

  Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \overset{f(-1)=-16}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)+16}{x+1} \quad (7)$$

  Είναι:

$$-1 < \xi < x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \overset{(7)}{\Rightarrow} \frac{f(x)+16}{x+1} < f'(x) \overset{x+1>0}{\Rightarrow} f'(x)\big(x+1\big)-f(x)-16 > 0$$

Άρα:

$$\int_{-1}^{1}\big((x+1)f'(x)-f(x)-16\big)dx>0\Rightarrow\int_{-1}^{1}(x+1)f'(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx-16\int_{-1}^{1}dx>0\overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\left[(x+1)f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(x+1)'f(x)dx+E-32>0\Rightarrow\left[(x+1)f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}f(x)dx+E-32>0\overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\big(2f(1)-0\big)+E+E-32>0\overset{f(1)=0}{\Rightarrow}2E>32\Rightarrow E>16\quad(8)$$

Από τις σχέσεις (6) και (8) έχουμε $16<E<32$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=-\ln 2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)}=1+f'(x)\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\ln(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $\big(0,f(0)\big)$

γ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx<-\frac{1+\ln 16}{4}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)+f(\ln x)=f(x)+f(0)$ στο διάστημα $(0,+\infty)$

ε) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\big(\ln(e+1)-\ln 2\big)x_0-\ln(e+1)$

ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\ln^2\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$e^{f(x)}=1+f'(x)\overset{\div e^{f(x)}}{\Rightarrow}1=e^{-f(x)}+e^{-f(x)}f'(x)\Rightarrow$$

$$e^{-f(x)}f'(x)=1-e^{-f(x)}\Rightarrow-e^{-f(x)}\big(-f(x)\big)'=1-e^{-f(x)}\Rightarrow$$

$$\left(-e^{-f(x)}\right)'=1-e^{-f(x)}\Rightarrow\left(1-e^{-f(x)}\right)'=1-e^{-f(x)}\Rightarrow$$

$$g'(x)=g(x),\ \text{όπου}\ g(x)=1-e^{-f(x)},\ x\in\mathbb{R}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x)=g(x)\Leftrightarrow g(x)=ce^x\Leftrightarrow 1-e^{-f(x)}=ce^x$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$1-e^{-f(0)}=ce^0\overset{f(0)=-\ln 2}{\Leftrightarrow}1-e^{\ln 2}=c\cdot 1\Leftrightarrow c=1-2\Leftrightarrow c=-1$$

Επομένως έχουμε:

$$g(x) = -e^x \Leftrightarrow 1 - e^{-f(x)} = -e^x \Leftrightarrow$$
$$e^{-f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow -f(x) = \ln\left(e^x + 1\right) \Leftrightarrow$$
$$f(x) = -\ln\left(e^x + 1\right),\ x \in R$$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = -\frac{1}{e^x + 1}\left(e^x + 1\right)' = -\frac{e^x}{e^x + 1}$$
$$f''(x) = -\frac{(e^x)' \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} =$$
$$= -\frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)\left(x - 0\right) \Rightarrow y - \left(-\ln 2\right) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow$$
$$y + \ln 2 = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \ln 2$$

γ) Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R, οπότε η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται από την εφαπτομένη (ε) και «κάτω», δηλαδή για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) \le y \Leftrightarrow f(x) \le -\frac{1}{2}x - \ln 2 \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{2}x + \ln 2 \le 0$$

και το «ίσον» ισχύει μόνο για $x = 0$ (τετμημένη σημείου επαφής), άρα δεν είναι παντού μηδέν, οπότε έχουμε:

$$\int_0^1 \left(f(x) + \frac{1}{2}x + \ln 2\right)dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x dx + \int_0^1 \ln 2 dx < 0 \Leftrightarrow$$
$$\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \ln 2 \cdot (1 - 0) < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + \ln 2 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{4} + \ln 2 < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \frac{1 + 4\ln 2}{4} < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx < -\frac{1 + \ln 16}{4}$$

δ)
- Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0)$ είναι η $x = 1$
- Για $0 < x < 1$ είναι:
  - ♦ $x^2 < x \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x^2) > f(x)$
  - ♦ $\ln x < \ln 1 \Rightarrow \ln x < 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\ln x) > f(0)$

  Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

  $$f(x^2) + f(\ln x) > f(x) + f(0)$$

  Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα $\left(0, 1\right)$

- Για $x>1$ είναι:
  - $x^2 > x \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x^2) < f(x)$
  - $\ln x > \ln 1 \Rightarrow \ln x > 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\ln x) < f(0)$

  Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:
  $$f(x^2)+f(\ln x) < f(x)+f(0)$$
  Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(1,+\infty)$

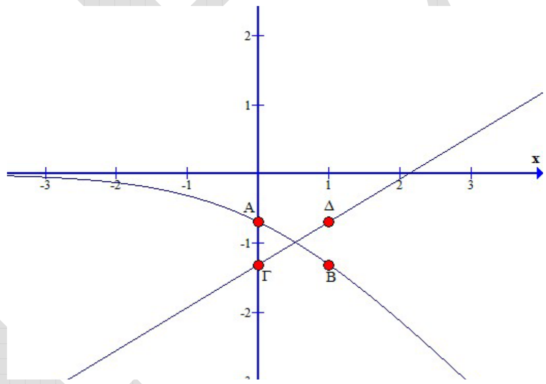
  Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=1$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)x+\ln(e+1),\ x\in[0,1]$

i) Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$h(0)=f(0)+\ln(e+1)=-\ln 2+\ln(e+1)=\ln(e+1)-\ln 2>0$

$h(1)=f(1)-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)+\ln(e+1)=\ln 2-\ln(e+1)<0$



Οπότε $h(0)h(1)<0$. Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα θα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$, δηλαδή

$$f(x_0)-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)x_0+\ln(e+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$f(x_0)=\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)x_0-\ln(e+1)$$

ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,x_0]$, άρα από Θ.Μ.Τ. , θα υπάρχει $\xi_1\in(0,x_0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)x_0-\ln(e+1)+\ln 2}{x_0}=\frac{\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)(x_0-1)}{x_0} \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_0,1]$, άρα από Θ.Μ.Τ. , θα υπάρχει $\xi_2\in(x_0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)x_0-\ln(e+1)+\ln(e+1)}{x_0-1}=\frac{\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)x_0}{x_0-1} \quad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\frac{\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)(x_0-1)}{x_0}\cdot\frac{\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)x_0}{x_0-1}=$$
$$=\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)^2=\ln^2\left(\frac{e+1}{2}\right)$$