ΟΡΙΑ 0/0

1. *Ορισμός*: Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0, πρέπει η *f* να ορίζεται όσο θέλουμε "**κοντά στο x_0**", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, ή (α,x_0), ή (x_0,β).

2. Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, όπως πχ $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)=-1$, ή να μην ανήκει σ' αυτό, όπως πχ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$.

3. Η τιμή της συνάρτησης f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της f στο x_0, όπως πχ για την $f(x)=2x-3$, είναι $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)=-1$, ή διαφορετική από αυτό, όπως για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 5, & x=1\end{cases}$, είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2\neq f(1)=5$.

4. *Ορισμός*: *ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ*:

Το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^-\\ x<x_0}}f(x)$, ονομάζεται όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα **αριστερά** και ονομάζεται **αριστερό όριο** της f στο x_0 και το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\ x>x_0}}f(x)$, ονομάζεται όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα **δεξιά** και ονομάζεται **δεξιό όριο** της f στο x_0.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\ell$.

6. *Ορισμός*: Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α,x_0), τότε ορίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0^-\\ x<x_0}}f(x)$. Πχ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0$.

7. *Ορισμός*: Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0,β), τότε ορίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\ x>x_0}}f(x)$.

Πχ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

8. ● Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

● Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

9. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\leq g(x)$, ή $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\leq\lim_{x\to x_0}g(x).$$

10. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\kappa\cdot f(x)\right)=\kappa\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, κ=σταθερός πραγματικός αριθμός.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^{\nu}$.

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον f(x)≥0 κοντά στο x_0.

11. Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης P(x)=$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0).$$

Απόδειξη: Έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0)=$

$$=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}(\alpha_1 x)+\alpha_0=$$

$$=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x_0+\alpha_0$$

$$=P(x_0).$$

12. Όριο ρητής συνάρτησης: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

13. Κριτήριο παρεμβολής:

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν ισχύει:

- h(x)≤f(x)≤g(x) κοντά στο x_0 .
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$.

Τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Το κριτήριο παρεμβολής ισχύει και για πλευρικά όρια.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x-1}{x}=0$.

16. Όριο σύνθετης συνάρτησης.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$, όπου $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ εφόσον υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια

17. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και κοντά στο x_0 είναι |f(x)|≤|g(x)|, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Η απόδειξη με κριτήριο παρεμβολής.

18. Μπορεί να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))\in$R και να μην υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Πχ οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν x} > 4\\ -1, & \text{αν x} < 4\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & \text{αν x} > 4\\ 1, & \text{αν x} < 4\end{cases}$ δεν έχουν όριο στο x_0=4, αλλά $\lim\limits_{x\to 4}(f(x)+g(x))=0$.

19. Αν f(x)>0 (**f(x)<0**) κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0, τότε, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ (**αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq 0$**).

20. Ομοίως εάν f(x)≥ 0 (**f(x) ≤0**) .

21. Αν f(x)>g(x), (**f(x)<g(x)**) κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (**αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$**).

22. Ομοίως εάν f(x)≥ g(x), (**f(x) ≤g(x)**) .

23. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0\pm h)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 1} f(x_0 h)$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}=1$, α≠0.

25. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, τότε την συνάρτηση *f* την λέμε ***μηδενική συνάρτηση στο x_0*** (Δεν το μαθαίνετε απ' έξω, γιατί δεν αποτελεί εξεταστέα ύλη).

26. Εάν το πεδίο τιμών *f(A$_f$)* μιας συνάρτησης *f* είναι διάστημα της μορφής (α,β), [α,β], (α,β] ή [α,β) με α,β≠±∞, τότε η συνάρτηση *f* λέγεται ***φραγμένη συνάρτηση*** (Δεν το μαθαίνετε απ' έξω, γιατί δεν αποτελεί εξεταστέα ύλη).

27. Το γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη συνάρτηση είναι μηδενική συνάρτηση. Αυτό αποτελεί οδηγία και όχι θεώρημα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Θα το αποδεικνύετε όταν το χρησιμοποιείτε με κριτήριο παρεμβολής. Παράδειγμα το $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$. Είναι γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη συνάρτηση.

28. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε f(x)>g(x) κοντά στο x_0.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε f(x)<g(x) κοντά στο x_0.

29. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ (ή $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=0$), τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. (Με απόδειξη. Χρησιμοποιούμε κριτήριο παρεμβολής στην ανισότητα $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$).

Το παραπάνω δεν ισχύει εάν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=l\neq 0$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=l\neq 0$. Πχ η $f(x)=\frac{|x|}{x}$, x≠0, έχει $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)=1$, ενώ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt{5}-x\sqrt{x}}$ ii) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^7-x+2|-2}{x-1}$ v) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$ vi) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8}$

vii) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1}$. vii) $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|x-1|+x^2-5x+4}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{|x+3|+x^2+5x+6}{x^2-9}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}$ iv) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{x^3-3x-2}$ v) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4-|x+2|}{|3x-1|+x}$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|2x-1|+x-2}{x^2-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{|x^2-x|}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-3|+3|x-1|-4}{x-2}$.

5. <u>Να υπολογίσετε τα όρια, για τις διάφορες τιμές του α∈R:</u>

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha^2-x^2}{|x|-a}$ ii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-|a|}{|x|-a}$

6. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=1$ και $g(x)\neq 1$ κοντά στο x_0, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όπου $f(x)=\dfrac{\sqrt{g^2(x)+3}-2}{g(x)-1}$.

7. Εάν α,β∈Z, και $f(x)=\begin{cases}4x, & x\leq\beta\\ 2(x+\alpha)+1, & x>\beta\end{cases}$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$.

8. Να εξετάσετε εάν υπάρχουν α,β∈R, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax+2\beta-5}{x^2-1}=4.$

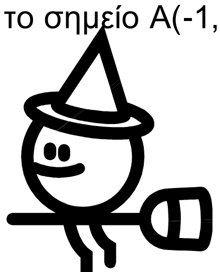
9. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3-x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\eta\mu x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\varepsilon\phi x}$ vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 7x}{\varepsilon\phi 3x}$

viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$ ix) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2-9)\eta\mu(x-1)}{|x^2-4x+3|}$ x) $\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha}$

10. Να υπολογίσετε τα α,β∈R, τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}2ax+5\beta, & \text{αν } \chi\leq 0\\ x^2+3\beta x+a+\beta, & \text{αν } x>0\end{cases}$, να διέρχεται από το σημείο Α(-1,3) και να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



11. Αν $f(x)=\begin{cases}3x^2-\alpha x+\beta, & \text{αν } \chi\leq -2\\ (\beta+2)x^2-x+a, & \text{αν } -2<x<1\\ x^2+2\beta x+2a-6, & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$, να υπολογίσετε τα α,β∈R, τέτοια ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

12. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}(3f(x)-2g(x))=7$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(3g(x)+7f(x))=1$ να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

13. Εάν f περιττή στο R και $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-1+\sqrt{x})=\sqrt{2}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

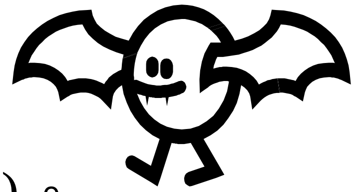
14. Εάν f(x)=f(1-x) για κάθε x∈R, και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+4}{x-2}=1$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

15. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-2}{f(x)+3}=0$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=2.

16. Εάν $\left|f(x)-g(x)\right|\le h(x)$, για κάθε x∈(α,$x_0$)U($x_0$,β), και $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)$=0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=ℓ∈R, να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$=ℓ.

17. Αν για κάθε x∈R είναι $\left|\eta\mu x - xf(x)\right|\le\left|x-\eta\mu x\right|$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=1.

18. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$=0 και f(x)<0<g(x) κοντά στο x_0, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$=0.



19. Εάν **$f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$** για κάθε x∈R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=1.

20. Εάν **$2x\eta\mu x+f^2(x)\le 2xf(x)+\eta\mu^2 x$** για κάθε x∈R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=0.

21. Εάν **$x-x^3\le 2f(x)\le x$**, για κάθε **x∈R**, να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

22. Έστω **f:(0,+∞)→R** με **f(x) ≥ 1/2** και για κάθε **x>0** ισχύει **$f(x)-1<x<f^2(x)-f(x)$**. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=1.

23. Έστω **f: R→R** τέτοια ώστε **$f^3(x)+2x^2f(x)=3\eta\mu^3 x$** για κάθε **x∈R**. Εάν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a\in R$,

- **i)** να δείξετε ότι **α=1**,
- **ii)** να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$.

24. i