

- 1. Ορισμός:** Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “**κοντά στο x_0** ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ή (α, x_0) , ή (x_0, β) .
- 2.** Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, όπως πχ $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1$, ή να μην ανήκει σ’ αυτό, όπως πχ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 2$.
- 3.** Η τιμή της συνάρτησης f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της f στο x_0 , όπως πχ για την $f(x) = 2x - 3$, είναι $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1$, ή διαφορετική από αυτό, όπως για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 5$.

4. Ορισμός: ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ:

Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, ονομάζεται όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα **αριστερά** και ονομάζεται **αριστερό όριο** της f στο x_0 και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, ονομάζεται όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα **δεξιά** και ονομάζεται **δεξιό όριο** της f στο x_0 .

- 5.** Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$.

- 6. Ορισμός:** Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , τότε ορίζουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Πχ $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$.

- 7. Ορισμός:** Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , τότε ορίζουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Πχ $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

- 8.**
 - Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
 - Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- 9.** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$, ή $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- 10.** Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $k = \text{σταθερός}$ πραγματικός αριθμός.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .

- 11.** Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Απόδειξη: Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + a_0 = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0)$.

- 12.** Όριο ρητής συνάρτησης: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

- 13.** Κριτήριο παρεμβολής:
 Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν ισχύει:
 - $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 .
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.
 Τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Το κριτήριο παρεμβολής ισχύει και για πλευρικά όρια.

- 14.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

- 15.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu x - 1}{x} = 0$.



- 16.** Όριο σύνθετης συνάρτησης.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$, όπου $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ εφόσον υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια

- 17.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και κοντά στο x_0 είναι $|f(x)| \leq |g(x)|$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Η απόδειξη με κριτήριο παρεμβολής.

- 18.** Μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \in \mathbb{R}$ και να μην υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Πχ οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 4 \\ -1, & \text{αν } x < 4 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x > 4 \\ 1, & \text{αν } x < 4 \end{cases}$ δεν

έχουν όριο στο $x_0=4$, αλλά $\lim_{x \rightarrow 4} (f(x) + g(x)) = 0$.

19. Αν $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 , τότε, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$).

20. Ομοίως εάν $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$).

21. Αν $f(x) > g(x)$, ($f(x) < g(x)$) κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$).

22. Ομοίως εάν $f(x) \geq g(x)$, ($f(x) \leq g(x)$).

23. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 \pm h)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h)$

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{ax} = 1, a \neq 0$.

25. Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε την συνάρτηση f την λέμε **μηδενική συνάρτηση στο x_0** (Δεν το μαθαίνετε απ' έξω, γιατί δεν αποτελεί εξεταστέα ύλη).

26. Εάν το σύνολο τιμών $f(A_f)$ μιας συνάρτησης f είναι διάστημα της μορφής (α, β) , $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta \neq \pm\infty$, τότε η συνάρτηση f λέγεται **φραγμένη συνάρτηση** (Δεν το μαθαίνετε απ' έξω, γιατί δεν αποτελεί εξεταστέα ύλη).

27. Το γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη συνάρτηση είναι μηδενική συνάρτηση. Αυτό αποτελεί οδηγία και όχι θεώρημα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Θα το αποδεικνύετε όταν το χρησιμοποιείτε με κριτήριο παρεμβολής. Παράδειγμα το $\lim_{x \rightarrow 0} (x \eta\mu \frac{1}{x}) = 0$. Είναι γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη συνάρτηση. Απόδειξη:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $|\eta\mu \frac{1}{x}| \leq 1$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot |\eta\mu \frac{1}{x}| \leq |x|$$

$$\Leftrightarrow |x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}| \leq |x|$$

$$\Leftrightarrow -|x| \leq |x \eta\mu \frac{1}{x}| \leq |x|.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \eta\mu \frac{1}{x}) = 0.$$

28. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 .

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $f(x) < g(x)$

κοντά στο x_0 .

29. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ (ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$), τότε

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. (Με απόδειξη. Χρησιμοποιούμε κριτήριο παρεμβολής στην ανισότητα $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$).

30. Το παραπάνω δεν ισχύει εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| =$

$l \neq 0$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l \neq 0$. Πχ η $f(x) = \frac{|x|}{x}$,

$x \neq 0$, έχει $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 1$, ενώ το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{5x}}{5\sqrt{5} - x\sqrt{x}}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2\sqrt{-3x-3} + x}{\sqrt{x+3}}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^7 - x + 2| - 2}{x - 1}$

v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

vi) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 2x - 8}$

vii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 5x^2 - 8x - 1}{x^4 + x^3 - x - 1}$

viii) $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{2}} \frac{x^3 - 2}{x - \sqrt[3]{2}}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

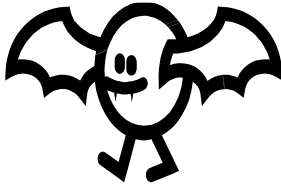
i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x^2 - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1| + x^2 - 5x + 4}{x-1}$



iv) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^3 - 3x - 2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x+3| + x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$

v) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|-x^2 + 3x| + x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x^2 - 4}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - |x+2|}{|3x-1| + x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{|x^2 - x|}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|2x-1| + x - 2}{x^2 - 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3| + 3|x-1| - 4}{x-2}$

5. Να υπολογίσετε τα όρια, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$:

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - x^2}{|x| - a}$

ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - |a|}{|x| - a}$

6. Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$ και $g(x) \neq 1$ κοντά στο x_0 , να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όπου $f(x) = \frac{\sqrt{g^2(x)+3} - 2}{g(x) - 1}$.

7. Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, και $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \beta \\ 2(x + \alpha) + 1, & x > \beta \end{cases}$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x)$.

8. Να εξετάσετε εάν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha x + 2\beta - 5}{x^2 - 1} = 4$.

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 - x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\varepsilon\phi x}$

vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x}{\varepsilon\phi 3x}$

viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 9)\eta\mu(x-1)}{|x^2 - 4x + 3|}$

x) $\lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{\eta\mu x + \eta\mu \alpha}{x + \alpha}$



10. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 5\beta, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 + 3\beta x + \alpha + \beta, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \in \mathbb{R}$.

11. Αν $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \alpha x + \beta, & \text{αν } x \leq -2 \\ (\beta + 2)x^2 - x + \alpha, & \text{αν } -2 < x < 1 \\ x^2 + 2\beta x + 2\alpha - 6, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$, να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

12. Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} (3f(x) - 2g(x)) = 7$
και $\lim_{x \rightarrow x_0} (3g(x) + 7f(x)) = 1$ να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
13. Εάν f περιπτή στο \mathbb{R} και $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 1 + \sqrt{x}) = \sqrt{2}$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
14. Εάν $f(x) = f(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+4}{x-2} = 1$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
15. Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-2}{f(x)+3} = 0$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$.
16. Εάν $|f(x) - g(x)| \leq h(x)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι
και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.
17. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x - xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
18. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$ και $f(x) < 0 < g(x)$ κοντά στο x_0 , να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.
19. Εάν $f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
20. Εάν $2\eta\mu x + f^2(x) \leq 2xf(x) + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
21. Εάν $x - x^3 \leq 2f(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
22. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 1/2$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) - 1 < x < f^2(x) - f(x)$. Να δείξετε ότι
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
23. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εάν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$,
i) να δείξετε ότι $\alpha = 1$,
ii) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$.
24. 24768-2: Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 9)
γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$
(Μονάδες 10)
25. 28477-2: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (Μονάδες 4)
β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$. (Μονάδες 8)
γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta\mu^2 x - 4}{x}$. (Μονάδες 13)
26. 28684-3: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$. Αν επιπλέον
ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$ (Μονάδες 4)
β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$. (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 4)
δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού « $\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$, κοντά στο 0». Να
δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)
27. END.