ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ 0/0

1) Αν $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ και κοντά στο x_0 είναι $|f(x)|\le|g(x)|$, τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. Η απόδειξη με κριτήριο παρεμβολής.

2) Μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))\in R$ και να μην υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Πχ οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x>4\\ -1, & \text{αν } x<4\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & \text{αν } x>4\\ 1, & \text{αν } x<4\end{cases}$ δεν έχουν όριο στο $x_0=4$, αλλά $\lim_{x\to 4}(f(x)+g(x))=0$.

3) Αν $f(x)>0$ ($f(x)<0$) κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\ge 0$ (αντίστοιχα $\lim_{x\to x_0} f(x)\le 0$).

4) Ομοίως εάν $f(x)\ge 0$ ($f(x)\le 0$) .

5) Αν $f(x)>g(x)$, ($f(x)<g(x)$) κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\ge \lim_{x\to x_0} g(x)$ (αντίστοιχα $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$).

6) Ομοίως εάν $f(x)\ge g(x)$, ($f(x)\le g(x)$) .

7) $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)$, όπου $u_0=\lim_{x\to x_0} g(x)$ (αντικατάσταση ανεξάρτητης μεταβλητής).

8) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0\pm h)$ και $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 1} f(x_0 h)$

9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}=1$, $\alpha\neq 0$.

10) Εάν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, τότε την συνάρτηση *f* την λέμε ***μηδενική συνάρτηση***.

11) Εάν το πεδίο τιμών *f(A$_f$)* μιας συνάρτησης *f* είναι διάστημα της μορφής (α,β), [α,β], (α,β] ή [α,β) με $\alpha,\beta\neq\pm\infty$, τότε η συνάρτηση *f* λέγεται ***φραγμένη συνάρτηση***.

12) Το γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη συνάρτηση είναι μηδενική συνάρτηση. Αυτό αποτελεί οδηγία και όχι θεώρημα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Θα το αποδεικνύετε όταν το χρησιμοποιείτε με κριτήριο παρεμβολής.

13) $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0.$ (Με απόδειξη. Είναι γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη συνάρτηση).

14) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>\lim_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x)>g(x)$ κοντά στο x_0.

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<\lim_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0.

15) Το κριτήριο παρεμβολής ισχύει και για πλευρικά όρια.

16) Αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$ (ή $\lim_{x\to x_0} f^2(x)=0$), τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. (Με απόδειξη. Χρησιμοποιούμε κριτήριο παρεμβολής στην ανισότητα $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$).

Το παραπάνω δεν ισχύει εάν $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=l\neq 0$ ή $\lim_{x\to x_0} f^2(x)=l\neq 0$. Πχ η $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x\neq 0$, έχει $\lim_{x\to 0} f^2(x)=1$, ενώ το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x\to 5}\dfrac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt{5}-x\sqrt{x}}$ ii) $\lim_{x\to -3}\dfrac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}$ iii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^7-x+2|-2}{x-1}$ v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$ vi) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8}$

vii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1}$. vii) $\lim\limits_{x\to \sqrt[3]{2}}\dfrac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}}$

2. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

3. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|+x^2-5x+4}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{|x+3|+x^2+5x+6}{x^2-9}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}$ iv) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-x-2|}{x^3-3x-2}$ v) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}$

4. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4-|x+2|}{|3x-1|+x}$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|2x-1|+x-2}{x^2-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{|x^2-x|}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-3|+3|x-1|-4}{x-2}$.

5. <u>Να υπολογίσετε τα όρια, για τις διάφορες τιμές του α∈R:</u>

i) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\alpha^2-x^2}{|x|-a}$ ii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-|a|}{|x|-a}$

6. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=1$ και $g(x)\neq 1$ κοντά στο x_0, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όπου $f(x)=\dfrac{\sqrt{g^2(x)+3}-2}{g(x)-1}$.

7. Εάν α,β∈Z, και $f(x)=\begin{cases}4x, & x\le \beta\\ 2(x+\alpha)+1, & x>\beta\end{cases}$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$.

8. Να εξετάσετε εάν υπάρχουν α,β∈R, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax+2\beta-5}{x^2-1}=4.$

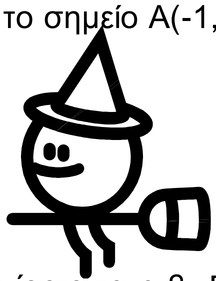
9. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3-x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\eta\mu x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\varepsilon\phi x}$ vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 7x}{\varepsilon\phi 3x}$

viii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$ **ix)** $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x^2-9)\eta\mu(x-1)}{|x^2-4x+3|}$ **x)** $\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha}$

10. Να υπολογίσετε τα α,β∈R, τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}2ax+5\beta, & \text{αν } \chi\le 0\\ x^2+3\beta x+a+\beta, & \text{αν } x>0\end{cases}$, να διέρχεται από το σημείο Α(-1,3) και να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.



11. Αν $f(x)=\begin{cases}3x^2-\alpha x+\beta, & \text{αν } \chi\le -2\\ (\beta+2)x^2-x+a, & \text{αν } -2<x<1\\ x^2+2\beta x+2a-6, & \text{αν } x\ge1\end{cases}$, να υπολογίσετε τα α,β∈R, τέτοια ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

12. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}(3f(x)-2g(x))=7$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(3g(x)+7f(x))=1$ να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

13. Εάν f περιττή στο R και $\lim\limits_{x\to2}(f(x)-1+\sqrt{x})=\sqrt{2}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$.

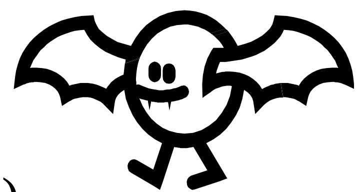
14. Εάν f(x)=f(1-x) για κάθε x∈R, και $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+4}{x-2}=1$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$.

15. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-2}{f(x)+3}=0$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=2$.

16. Εάν $|f(x)-g(x)|\le h(x)$, για κάθε x∈(α,x_0)U(x_0,β), και $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell\in R$, να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$.

17. Αν για κάθε x∈R είναι $|\eta\mu x-xf(x)|\le|x-\eta\mu x|$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

18. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$ και f(x)<0<g(x) κοντά στο x_0, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.



19. Εάν **$f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2x\le0$** για κάθε x∈R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

20. Εάν **$2x\eta\mu x+f^2(x)\le$`$2xf(x)+\eta\mu^2x$** για κάθε x∈R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

21. Εάν **$x-x^3\le2f(x)\le x$**, για κάθε **x∈R**, να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$.

22. Έστω **f:(0,+∝)→R** με **f(x) ≥ 1/2** και για κάθε **x>0** ισχύει **$f(x)-1<x<f^2(x)-f(x)$**. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

23. Έστω **f: R→R** τέτοια ώστε $\mathbf{f^3(x)+2x^2f(x)=3\eta\mu^3x}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$. Εάν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = a \in R$,

i) να δείξετε ότι **α=1**,

ii) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}$.

24. i