Παρατηρήσεις Θ. Rolle

1. Μια εξίσωση f(x)=0 όπου f συνάρτηση η οποία ικανοποιεί το Θ.Rolle σε κατάλληλο διάστημα, έχει το πολύ ν ρίζες, όταν δεν έχει ν+1 ρίζες. Υποθέτουμε ότι έχει ν+1 ρίζες ρ_1, ρ_2, ... , $\rho_{\nu+1}$, διαφορετικές ανά δυο και επειδή $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_{\nu+1})=0$ εφαρμόζουμε το Θ.Rolle στα διαστήματα που ορίζουν, καταλήγοντας σε άτοπο.
   (ασκήσεις 1, 2, 3)
2. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση f(x)=0 όπου f συνάρτηση η οποία ικανοποιεί το Θ.Rolle σε κατάλληλο διάστημα, έχει το πολύ ν ρίζες, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση f΄(x)=0 έχει ν-1 ρίζες, γιατί αν η f(x)=0 είχε ν+1 ρίζες, τότε εφαρμόζοντας το Θ. Rolle στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, ...,$[\rho_\nu,\rho_{\nu+1}]$, η εξίσωση f΄(x)=0 έχει ν ρίζες, άτοπο.
   (άσκηση 4)
3. Η έκφραση «μοναδική ρίζα» υπονοεί:
   - τουλάχιστον μια, άρα Bolzano,
   - όχι δυο, άρα Rolle ή μονοτονία

   (ασκήσεις 5, 6, 7, 8, 9 και 12)
4. Εάν το Θ. Bolzano δεν εφαρμόζεται για την f(x) στο δοθέν διάστημα, τότε εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο διάστημα αυτό για μια συνάρτηση F(x) που έχει παράγωγο την f(x), δηλαδή F΄(x)=f(x) και λέγεται αρχική συνάρτηση της f.
   (ασκήσεις 10, 11, 12)
5.

Σχέση προς απόδειξη	Συνάρτηση που εφαρμόζουμε το Θ. Rolle
f΄(ξ)=c, c=σταθ.	F(x)=f(x)-cx
f΄(ξ)=cf(ξ)	$F(x)=e^{-cx}f(x)$
f΄(ξ)(ξ-c)=f(ξ)	F(x)=$\dfrac{f(x)}{x-c}$
ξf΄(ξ)=νf(ξ), ν∈N*	F(x)=$\dfrac{f(x)}{x^\nu}$
f΄(ξ)(c-ξ)=f(ξ)	F(x)=f(x)(x-c)
$f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$	$F(x)=f(x)-x^\nu$

Παρατηρήσεις ΘΜΤ

1. Αν f παραγωγίσιμη στο [α,β], τότε εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο [α, β],
2. Το ΘΜΤ μπορεί να διατυπωθεί και
   f΄(ξ)= $\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ ή
   f(β)=f(α)+(β-α)f΄(ξ),
3. Οι συνθήκες του ΘΜΤ είναι ικανές, δεν είναι όμως αναγκαίες. Πχ η συνάρτηση f(x)= $=\begin{cases}4x+12, x<0\\ x^2, \quad x\geq 0\end{cases}$, δεν είναι συνεχής στο 0, υπάρχει όμως ξ∈(-2, 4) τέτοιο ώστε f΄(ξ)= $=\dfrac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}$, το ξ=1,
4. Ένδειξη εφαρμογής ΘΜΤ είναι η διαφορά f(β)-f(α). Να έχετε υπόψιν σας ότι lne=1, $\alpha^0=$ $=e^0=x^0=1$, ln1=0, ln(β/α)=lnβ-lnα,
5. Για την απόδειξη ανισοτήτων με την βοήθεια του ΘΜΤ, χρησιμοποιούμε την ανισότητα α<ξ<β,
6. Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής A(x)≥B(x) ή A(x)≤B(x), εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την συνάρτηση f(x)=A(x)- -B(x) σε κατάλληλο διάστημα,
7. Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+\ldots+f'(\xi_\nu)=0$, χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ίδιου πλάτους υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε σε αυτά το ΘΜΤ,
8. Πολλές φορές πίσω από μια σχέση της μορφής f΄΄(ξ)=0, κρύβεται το ΘΜΤ για την f σε συνδυασμό με Θ.Rolle για την f΄,
9. Για ανισότητες μιας μεταβλητής, θεωρούμε την συνάρτηση της διαφοράς και αν η παράγωγος αυτής μηδενίζεται για εσωτερικό σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στα διαστήματα $[x, x_o]$ αν $x<x_o$ και $[x_o, x]$ αν $x>x_o$. (άσκηση 15)

Ασκήσεις Θ. Rolle

1. Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ, και δυο φορές παραγωγίσιμη στο Δ. Αν $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ δυο ρίζες στο Δ.
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5+4x^3+2x+1=0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο R.
3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{10}-3x+8=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.
4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2-x+2-e^{x+1}=0$, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.
5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-2x^2-4x+1=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα στο (0, 2).
6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5+10x-3=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.
7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+3x+\alpha=0$, $\alpha\in R$, έχει μοναδική πραγματική ρίζα.
8. Εάν $\beta^2-3\alpha\gamma<0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, $\alpha\neq 0$, έχει μοναδική ρίζα στο R.
9. Να δείξετε ότι η εξίσωση ημ7x-11x+1=0, $\alpha\neq 0$, έχει μοναδική ρίζα στο (0, π).
10. Εάν α+β=1, να δείξετε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2+2\beta x-1=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R.
11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $6\alpha x^2+6\beta x-2\alpha-3\beta=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).
12. Να δείξετε ότι η εξίσωση x^2=xημx+συνx, έχει δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες, μια στο διάστημα (-π, 0) και μια στο (0, π).
13. Εάν η f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(x)>0, για κάθε x∈(α, β), να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{1}{\alpha-\xi}+\dfrac{1}{\beta-\xi}$.
14. Έστω φ: R→R παραγωγίσιμη στο R με φ(0)=0.
    - **a)** Να βρεθεί το φ(π/2), αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση g(x)=φ(x)-ημx ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [0, π/2],
    - **b)** να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0, π/2), τέτοιο ώστε φ΄(ξ)=συνξ.
15. Έστω f, g συνεχείς στο [α, β], παραγωγίσιμες στο (α, β) με g(x)≠0 και g΄(x)≠0 για κάθε x∈(α, β) και f(α)=g(β)=0. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=0$.
16. Έστω f συνεχής στο [0, α], παραγωγίσιμη στο (0, α) και f(0)=0. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0, α), τέτοιο ώστε f(ξ)=(α-ξ)f΄(ξ).
17. Εάν f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f(α)=f(β)=0, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, στο οποίο $f'(x_0)=2f(x_0)$.
18. Έστω f συνεχής στο [2, 3], παραγωγίσιμη στο (2, 3) και 3f(2)=2f(3). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(2, 3), τέτοιο ώστε ξf΄(ξ)=f(ξ).
19. Έστω f, g ορισμένες και συνεχείς στο [α, β], και παραγωγίσιμες στο (α, β). Εάν g΄(x)≠0, για κάθε x∈(α, β), να δείξετε ότι:
    - **A.** g(α) ≠ g(β)
    - **B.** υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε: $$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
20. Έστω f, g συνεχείς στο [α, β], παραγωγίσιμες στο (α, β) με f(x)g(x)≠0 για κάθε x∈ [α, β] και $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε $$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}.$$

Ασκήσεις ΘΜΤ

1. Έστω $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta, & x\geq 1\\ 4x+\beta, & x<1\end{cases}$. Να υπολογίσετε τα α, β∈R, ώστε να εφαρμόζεται για την f το ΘΜΤ στο [0, 2]. Στην συνέχεια να υπολογίσετε το ξ∈(0, 2), για το οποίο ισχύει f(2)-f(0)=2f΄(ξ).
2. Έστω f συνεχής στο [α, β] και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν γ∈(α, β), τέτοιο ώστε τα α, γ, β και f(α), f(γ), f(β) να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικών προόδων, να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε f΄΄(ξ)=0.
3. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε f΄΄(ξ)=0.
4. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [1, 5] με f(1)=2 και 3≤f΄(x)≤5 για κάθε x∈(1, 5). Να δείξετε ότι 14≤f(5)≤22.
5. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [2, 5] παραγωγίσιμη στο (2, 5) με f(2)=2 και 5≤f(5)≤17 για κάθε x∈(2, 5). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(2,5) με 1≤f΄(ξ)≤5.

6. Εάν για την συνάρτηση f ισχύει $f'(x)\geq M$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, όπου Μ σταθερός πραγματικός, να δείξετε ότι $f(\beta)\geq f(\alpha)+M(\beta-\alpha)$.

7. Εάν για την συνάρτηση f ισχύει $|f'(x)|\leq M$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, όπου Μ σταθερός πραγματικός, να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)-M(\beta-\alpha)\leq f(\beta)\leq f(\alpha)+M(\beta-\alpha).$$

8. Για την $f: [0, 3]\to R$ ισχύει το Θ. Rolle στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0, 3]$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=0$.

9. Εάν $0\leq x\leq 1$, να δείξετε ότι $\frac{x}{2}\leq \ln(x+1)\leq x$.

10. Εάν $-\pi/4<\alpha<\beta<\pi/4$, να δείξετε ότι:

$$(\beta-\alpha)\eta\mu 2\alpha<\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\alpha<(\beta-\alpha)\eta\mu 2\beta.$$

11. Έστω $f: [\alpha, \beta]\to R$, με $f([\alpha, \beta])=(0, +\infty)$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=e^{\lambda(\beta-\alpha)}$, όπου $\lambda=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$.

12. Έστω $f: (0, +\infty)\to R$, συνεχής, παραγωγίσιμη και f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Εάν υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in(0, +\infty)$, με $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και $\alpha+\delta= =\beta+\gamma$, να δείξετε ότι $f(\beta)+f(\gamma)<f(\alpha)+f(\delta)$.

13. Εάν $x\in(0, \pi/2)$, να δείξετε ότι:

I. $\varepsilon\varphi x+2\eta\mu x>3x$

II. $\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x>1$.

14. Εάν $x\geq 0$, να δείξετε ότι:

$$1+\ln 2^x \leq 2^x \leq 1+2^x\ln 2^x.$$

15. Για $x>0$, να δείξετε ότι $x\ln x \geq x-1$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης της f που να είναι συνευθειακά.

17. Να δείξετε ότι για κάθε $0 < x < \pi/2$, ισχύει:

$$1<\frac{\varepsilon\phi x}{x}<1+\varepsilon\phi^2 x$$

18. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\xi,f(\xi))$, είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $-x+2y-1=0$.

19. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in R$, $e^x \geq x+1$.

20. Έστω $f: [0, +\infty)\to R$, συνεχής στο $[0, +\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, $f(0)=0$ και f' γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.