

1. Με χρήση των ταυτοτήτων, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $100.001^2 - 99.999^2$, β) $\left(\frac{1.001}{1.000}\right)^2 - \left(\frac{999}{1.000}\right)^2$ γ) $501 \cdot 499$

2. Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει $\frac{x+2y}{x-2y} = 3$.

α) Να δείξετε ότι $x=4y$.

β) Να δείξετε ότι η παράσταση $N = \frac{x^2+2xy-y^2}{xy}$ είναι ανεξάρτητη των x και y και να βρεθεί η τιμή της.

3. Για τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ ισχύει $\frac{\kappa+\lambda}{\kappa-\lambda} = \frac{1}{3}$.

α) Να δείξετε ότι $\kappa=-2\lambda$.

β) Να δείξετε ότι η παράσταση $N = \frac{(\kappa-\lambda)(\kappa+2\lambda)-2\kappa\lambda}{(\kappa+3\lambda)(\lambda-\kappa)}$ είναι ανεξάρτητη των κ και λ και να βρεθεί η τιμή της.

4. Να δείξετε ότι: α) $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2=4\alpha^2$.

β) $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2=4\beta^2$.

5. Να αποδείξετε ότι: α) $(\alpha-1)^3+3(\alpha-1)^2+3(\alpha-1)+1=\alpha^3$.

β) $(\alpha+1)^3-3(\alpha+1)^2+3(\alpha+1)-1=\alpha^3$.

6. α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$.

ε) Εάν $\alpha+\beta=8$ και $\alpha\beta=-20$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\alpha^2+\beta^2$, ii) $\alpha^3+\beta^3$, iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, iv) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$,

v) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$, vi) $\alpha^4+\beta^4$.

στ) Ομοίως εάν $\alpha+\beta=-8$ και $\alpha\beta=-20$.

7. Εάν $x \in \mathbb{R}^*$ και $x + \frac{1}{x} = 3$, να δείξετε ότι: α) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

β) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$.

8. Εάν $x \in \mathbb{R}^*$ και $x + \frac{1}{x} = 2$, να δείξετε ότι $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^4 + \frac{1}{x^4}$.

9. α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta} - \alpha\beta = (\alpha-\beta)^2$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{12^3+8}{14} - 24 = 100$.

10. α) Να αποδείξετε ότι $\frac{x^4+4}{(x-1)^2+1} - (x+1)^2 = 1$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{2025^4+4}{2024^2+1} - 2026^2 = 1$.

11. α) Εάν $2\alpha+\beta=1$, να δείξετε ότι $2\alpha^2+\beta^2+3\alpha\beta+\alpha=1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $2 \cdot (2025)^2 + (4049)^2 - 3 \cdot 2025 \cdot 4049 + 2025$.

12. α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι: i) $(x+y-1)^2 - (x+y)^2 + 2(x+y) = 1$.

ii) $(x-y-2)^2 - (x+y-2)^2 = 4y(2-x)$.

iii) $(\kappa-\lambda-\mu)^2 + (\lambda-\mu-\kappa)^2 + (\mu-\kappa-\lambda)^2 = 3(\kappa^2+\lambda^2+\mu^2) - 2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)$.

iv) η παράσταση $(\kappa+\lambda-\mu)^2 + 2(\kappa+\lambda-\mu)(\kappa-\lambda+\mu) + (\kappa-\lambda+\mu)^2$ είναι ανεξάρτητη των λ και $\mu \in \mathbb{R}$.

13. Εάν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να δείξετε ότι $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$.

14. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, η παράσταση:

$$A=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3)-(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2-(\gamma-\alpha)^2$$

είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της.

15. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $(\alpha-2)^2+2(\alpha-2)(3-\alpha)+(3-\alpha)^2$, είναι ανεξάρτητη του $\alpha \in \mathbb{R}$.

16.α) Ποια σχέση πρέπει να υπάρχει μεταξύ των α και β , ώστε να έχει νόημα η παράσταση $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$;

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta} = \alpha-\beta$, για $\alpha \neq -\beta$.

β) Για $\alpha \neq -\beta \neq \gamma \neq -\alpha$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma+\alpha} = 0$.

17.α) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α και β , ώστε να ορίζεται η παράσταση $\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}$.

β) Για $\alpha \neq -\beta$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta} = \alpha+\beta$.

γ) Για $\alpha \neq -\beta \neq \gamma \neq -\alpha$, και $\alpha+\beta+\gamma=0$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2-\gamma^2-2\gamma\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\gamma+\alpha} = 0$.

18. Για $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, να δείξετε ότι $\frac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\gamma+\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\alpha+\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 0$.

19.α) Να βρεθεί η σχέση (σχέσεις) μεταξύ των α, β και γ , ώστε να ορίζεται η παράσταση $\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+\beta\gamma}$.

β) Για $\alpha \neq \beta$ και $\alpha \neq \gamma$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+\beta\gamma} = \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$.

γ) Για $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{2\beta^2+\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{2\gamma^2+\alpha\beta} = 1$.

20.α) Ποια σχέση πρέπει να υπάρχει μεταξύ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών x και y , ώστε να έχει νόημα η παράσταση $\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3-2xy(x+y)}$;

β) Να δείξετε ότι $\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3-2xy(x+y)} = x-y$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3-2xy(x+y)} + \frac{y^4-z^4}{(y+z)^3-2yz(y+z)} + \frac{z^4-x^4}{(z+x)^3-2zx(z+x)} = 0$.

21.α) Για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α και β ορίζεται η παράσταση $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right)$;

β) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) = \alpha-\beta$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} \right) + \frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha}{\gamma} \right) = 0$.

22.α) Για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α και β ορίζεται η παράσταση $\frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$;

β) Να δείξετε ότι $\frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} + \frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}} + \frac{\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}} = 0$.

23.α) Να δείξετε ότι $(x-y)[(x+y)^2-xy]=x^3-y^3$.

β) Να δείξετε ότι $(x-y)[(x+y)^2-xy] + (y-z)[(y+z)^2-yz] + (z-x)[(z+x)^2-zx]=0$.

24.α) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)^2 = \alpha\beta$.

β) Για $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι $\left(\frac{\alpha + \frac{1}{\alpha}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2}\right)^2 = 1$.

- 25.** α) Εάν α =άρτιος και β =άρτιος, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ και $\alpha\beta$ είναι άρτιοι.
 β) Εάν α =άρτιος και β =περιττός, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$ είναι περιττοί ενώ ο αριθμός $\alpha\beta$ είναι άρτιος.
 γ) Εάν α = περιττός και β = περιττός, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ είναι άρτιοι, ενώ ο αριθμός $\alpha\beta$ είναι περιττός.
- 26.** α) Εάν α =άρτιος, να δείξετε ότι α^2 =άρτιος.
 β) Εάν α =περιττός, να δείξετε ότι α^2 = περιττός.
 γ) Εάν α^2 =άρτιος, να δείξετε ότι α =άρτιος.
 δ) Εάν α^2 =περιττός, να δείξετε ότι α =περιττός.
- 27.** α) Εάν α και β διαδοχικοί ακέραιοι, να δείξετε ότι το άθροισμά τους $\alpha+\beta$ είναι περιττός αριθμός και το γινόμενό τους $\alpha\beta$ είναι άρτιος αριθμός.
 β) (Θαλής 1999). Εάν α =περιττός ακέραιος, να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^4+6\alpha^2-7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.
- 28.** Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών ακέραιων αριθμών, είναι περιττός.
- 29.** Να δείξετε ότι η διαφορά των κύβων δυο διαδοχικών ακέραιων, όταν διαιρεθεί με το 3, αφήνει υπόλοιπο 1.
- 30.** (Θαλής 2002) Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς α , με $\alpha > 1$. Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του α , έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου. Να βρεθεί η πλευρά α . (Απ: $\alpha=2$)

Εάν $\alpha \in \mathbb{Z}$, να δείξετε ότι και $\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3} \in \mathbb{Z}$.

- 31.** (Παρεμφερές με Θαλή 2002) Τέσσερις αριθμοί α , β , γ και δ , έχουν την εξής ιδιότητα: «Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς, βρίσκουμε 2025». Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Ποιοι είναι οι τέσσερις αριθμοί; (Απ: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2700$, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=675$)

- 32.** Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, να δείξετε ότι η παράσταση n^3-n :
 α) ισούται με το γινόμενο τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών.
 β) είναι πολλαπλάσιο του 6.
- 33.** α) Να δείξετε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$.
 β) Εάν $\alpha+\beta+\gamma=0$, ή $\alpha=\beta=\gamma$, να δείξετε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.
 γ) Να λυθεί η εξίσωση $(2x-6)^3+(x+2)^3+(4-3x)^3=0$.
 δ) Εάν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, να δείξετε ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$, ή $\alpha=\beta=\gamma$.
 ε) Εάν $(x+1)^3+27+(y-2x)^3=9(x+1)(y-2x)$, να αποδείξετε ότι $(x=2$ και $y=7)$ ή $y=x-4$.

- 34.** (Θαλής 1998) Εάν α , β , γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ισχύει:

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma\right) + \beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \alpha\right) + \alpha\gamma\left(\frac{\alpha+\gamma}{2} - \beta\right) = 0,$$

να δείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

(Υπόδειξη: μετά από πράξεις $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2=0$.)

- 35.** α) Εάν $n \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
 β) Να δείξετε ότι $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{9}{10}$.
 γ) Να δείξετε ότι $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
 δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

- 36.** (Θαλής 1998)

α) Εάν $n \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} = \frac{99}{100}$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2v+1}{v^2 \cdot (v+1)^2} = 1 - \frac{1}{(v+1)^2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{199}{99^2 \cdot 100^2} = \frac{9.999}{10.000}$.

37. (Ευκλείδης 1999) Εάν α, β, γ ρητοί θετικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \alpha\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(\alpha^2\beta^2+1)(\beta^2\gamma^2+1)(\gamma^2\alpha^2+1)$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.
(Υπόδειξη: $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha^2\beta^2\gamma^2$. Προσθέτουμε α^2 και στα δυο μέλη. Με κυκλική εναλλαγή το αποτέλεσμα.)

38. (Ευκλείδης 1999) Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει $x-yz=y-zx=z-xy$. Να αποδείξετε ότι $(x-y)(y-z)(z-x)=0$.

39. Διψήφιου αριθμού, αντιστρέφουμε τα ψηφία του και προκύπτει νέος διψήφιος αριθμός. Εάν οι δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 18 και έχουν άθροισμα 66, να βρεθούν οι αριθμοί.

(Απ: 42 και 24)

40. (ΕΜΕ 1936-37) Εάν $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ και $(\alpha+\beta+\gamma)x=(-\alpha+\beta+\gamma)y=(\alpha-\beta+\gamma)\omega=(\alpha+\beta-\gamma)\varphi$, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{x}.$$

41. (ΕΜΕ 1937-38) Δυο κινητά κινούμενα ομαλώς πάνω σε κλειστή καμπύλη βρίσκονται κάποια στιγμή στο σημείο Α. Εάν από το σημείο αυτό κινηθούν κατά αντίθετη φορά, συναντιούνται μετά από 15", εάν κινηθούν κατά την ίδια φορά συναντιούνται μετά από 45", εάν όμως κινηθούν κατά την ίδια φορά αλλά για 55", η διαφορά των διαστημάτων που διανύουν στην καμπύλη θα είναι 100m. Ποια είναι η ταχύτητα κάθε κινητού και ποιο το μήκος της καμπύλης;

(Απ: $\frac{20}{11}\text{m/s}$, $\frac{40}{11}\text{m/s}$, $\frac{900}{11}\text{m}$)

42. (Θαλής 1999) Το άθροισμα δυο ακεραίων αριθμών είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρεθούν οι αριθμοί.

(Απ: 21 και 5)

43. (Θαλής 2000) Το τριπλάσιο ενός αριθμού, αυξημένο κατά 18, ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρεθεί ο αριθμός.

(Απ: 6, -3)

44. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι που ικανοποιούν την εξίσωση $x^5y^2+100x^3=200$.

(Υπόδειξη: πρέπει το x^3 να διαιρεί το 200)

(Απ: $x=1$ και $y=10$)

45. (Θαλής 2000) Οι δυο διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι θετικοί ακέραιοι x και y . Αν αυξήσουμε τη μια διάσταση κατά 1 και την άλλη διάσταση κατά 2, προκύπτει νέο ορθογώνιο διπλάσιου εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου. Να βρεθούν οι διαστάσεις x και y .
(Υπόδειξη: $(x-1)(y-2)=4$. Τρεις λύσεις)

46. (Θαλής 2000) Σε μια τάξη Λυκείου διοργανώθηκε πρωτάθλημα σκακιού. Την πρώτη ημέρα έγιναν μόνο κάποιοι αγώνες στους οποίους οι 80 αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Στους αγώνες αυτούς της πρώτης ημέρας, πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη είχε συνολικά 34 παιδιά, να βρείτε:

α) πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η Τάξη.

β) πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος την πρώτη ημέρα στους αγώνες.

47. (Θαλής 2000)

α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση x^4+4y^4 .

β) Αν οι αριθμοί x και y είναι θετικοί ακέραιοι και $y \geq 2$, να δείξετε ότι ο αριθμός x^4+4y^4 είναι σύνθετος.
(Υπόδειξη: προσθαφαιρούμε $4x^2y^2$)

48. (Θαλής 2001) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει $xyz=1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{1}{y+1-\frac{y}{x+1}} + \frac{1}{z+1-\frac{z}{y+1}} + \frac{1}{x+1-\frac{x}{z+1}}$.
(Απ: $K=2$)

49. (Θαλής 2001) Να λυθεί η εξίσωση $3(1+\alpha^2+\alpha^4)x=(1+\alpha+\alpha^2)^2x+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$, θεωρώντας το α ως παράμετρο.

(Υπόδειξη: Αν $\alpha=1$ είναι ταυτότητα, αν $\alpha \neq 1$, μοναδική λύση $x = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{2(\alpha-1)}$)

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη σχέση (ή σχέσεις) μεταξύ των x_1 και x_2 , ώστε $f(x_1)=f(x_2)$.

β) να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α και β , για τους οποίους $f(\alpha)=f(\beta)$.

51.END.