ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ X_0

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0.

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = -\infty$.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$.

3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = +\infty$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

4.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \text{και } f(x) > 0 \ \textit{κοντά} \ \text{στο } x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty.$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \text{και } f(x) < 0 \ \textit{κοντά} \ \text{στο } x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} = 0$.

6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$, όπου $\kappa \in Z$.

7. Ως συνέπεια των παρατηρήσεων (4) και (5) έχουμε:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$.

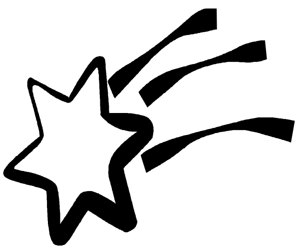
ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$.

iii) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$.

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|} = +\infty$

8. Επιτρεπτές και μη επιτρεπτές πράξεις (απροσδιόριστες μορφές):

επιτρεπτές πράξεις	απροσδιόριστες μορφές
$+\infty+\infty=+\infty$.	$+\infty-\infty$
$-\infty-\infty=-\infty$.	$-\infty+\infty$
$+\infty\pm\alpha=+\infty$, $\alpha\in R$.	$\pm\infty\cdot 0$
$-\infty\pm\alpha=-\infty$, $\alpha\in R$.	0^0
Αν α>0 τότε $+\infty\cdot\alpha=+\infty$ και $-\infty\cdot\alpha=-\infty$.	$(\pm\infty)^{\pm\infty}$
Αν α<0 τότε $+\infty\cdot\alpha=-\infty$ και $-\infty\cdot\alpha=+\infty$.	$(\pm\infty)^0$
$+\infty(+\infty)=+\infty$.	$0^{\pm\infty}$
$+\infty(-\infty)=-\infty$.	$\dfrac{0}{0}$
$-\infty(+\infty)=-\infty$.	
$-\infty(-\infty)=+\infty$.	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
$\dfrac{\alpha}{\pm\infty}=0$, $\alpha\in R$.	
$\dfrac{\pm\infty}{0}=\pm\infty$.	$1^{\pm\infty}$



9. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και ***g(x)≥f(x)*** κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$. (Άσκ. 2)

Εάν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ και ***g(x)≤f(x)*** κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$.

10. Εάν ***f(x)≥μ*** κοντά στο x_0, όπου μ∈R και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$.

11. Εάν ***f(x)≤M*** κοντά στο x_0, όπου M∈R και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Να υπολογίσετε τα όρια:*

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

iii) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3-x}{\eta\mu x}$

iv) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{|x|}\right)$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

vii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

viii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

ix) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{3-x}$

x) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

xi) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-x}{x^2+4x+4}$

2. *Ομοίως*:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

3. *Βρείτε το* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *στις παρακάτω περιπτώσεις*:

i) $\lim\limits_{x\to -1}(xf(x)+2)=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{xf(x)}=\pm\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x^2-2}=-\infty$

iv) $\lim\limits_{x\to -1}\left((x^2-2)f(x)\right)=+\infty$

4. *Για τις διάφορες τιμές των α, β∈R, να υπολογίσετε τα όρια*:

i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-\alpha}{|x-4|}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\alpha x+a}{|x-a|}$

iv) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-a|}$

5. Υπολογίστε τα α, β∈R, ώστε $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}=4$.

6. Υπολογίστε τα α, β∈R, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, της $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+\beta}{x^2-x}, & x<0\\ \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}, & x>0\end{cases}$.

7. Υπολογίστε τα κ, λ∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-\kappa x-\lambda}$, να έχει μη πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=-3$.

8. Υπολογίστε το α∈R, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+\alpha x^2+5x-2}{(x-1)^2}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

9. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει λ∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda x^2+x-6}{|x-2|}$, να έχει όριο στο $x_0=2$ πραγματικό αριθμό.