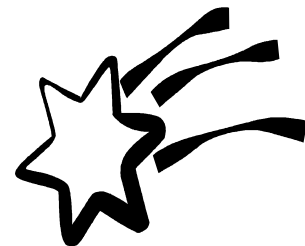


**ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ  $x_0$** 

1. •  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ .  
•  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ .
2. • Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .  
• Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .
3. • Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = -\infty$ .  
• Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = +\infty$ .
4. Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .
5. • Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .  
• Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .
6. Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ . Το αντίστροφο δεν ισχύει.
7. Av  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$ .
9. •  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N}$ .  
•  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, v \in \mathbb{N}$ .  
•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^v} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$ .
10. Επιτρεπτές και μη επιτρεπτές πράξεις (απροσδιόριστες μορφές):

επιτρεπτές πράξεις	απροσδιόριστες μορφές
$+\infty + \infty = +\infty$ .	$+\infty - \infty$
$-\infty - \infty = -\infty$ .	$-\infty + \infty$
$+\infty \pm \alpha = +\infty, \alpha \in \mathbb{R}$ .	$\pm \infty \cdot 0$
$-\infty \pm \alpha = -\infty, \alpha \in \mathbb{R}$ .	$0^0$
Av $\alpha > 0$ τότε $+\infty \cdot \alpha = +\infty$ και $-\infty \cdot \alpha = -\infty$ .	$(\pm \infty)^{\pm \infty}$
Av $\alpha < 0$ τότε $+\infty \cdot \alpha = -\infty$ και $-\infty \cdot \alpha = +\infty$ .	$(\pm \infty)^0$
$+\infty (+\infty) = +\infty$ .	$0^{\pm \infty}$
$+\infty (-\infty) = -\infty$ .	$\frac{0}{0}$
$-\infty (+\infty) = -\infty$ .	$\frac{\infty}{\infty}$
$-\infty (-\infty) = +\infty$ .	$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$
$\frac{\alpha}{\alpha} = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ .	$1^{\pm \infty}$
$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$	
$\frac{\pm \infty}{0} = \pm \infty$ .	
$\frac{0}{0}$	



11. • Εάν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  και  $g(x) \geq f(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ . (Άσκ. 2)  
• Εάν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  και  $g(x) \leq f(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ .
12. Εάν  $f(x) \geq m$  κοντά στο  $x_0$ , όπου  $m \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ .  
Εάν  $f(x) \leq M$  κοντά στο  $x_0$ , όπου  $M \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****1. Να υπολογίσετε τα όρια:**

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3-x}{\eta\mu x}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$

v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} \right)$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{|x|} \right)$



vii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$

viii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

ix)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{3-x}$

x)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

xi)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-x}{x^2 + 4x + 4}$

**2. Ομοίως:**

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - x\eta\mu \frac{1}{x} \right)$

**3. Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:**

i)  $\lim_{x \rightarrow -1} (xf(x) + 2) = +\infty$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 2} = -\infty$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{xf(x)} = \pm\infty$

iv)  $\lim_{x \rightarrow -1} ((x^2 - 2)f(x)) = +\infty$

**4. Για τις διάφορες τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε τα όρια:**

i)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - \alpha}{|x - 4|}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{|x - a|}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2 - 4x - \beta}{x}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - \alpha x + a}{|x - a|}$

**5. Υπολογίστε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x + 1} = 4$ .**

6. Υπολογίστε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , της  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - x}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}, & x > 0 \end{cases}$ .
7. Υπολογίστε τα  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - \kappa x - \lambda}$ , να έχει μη πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία  $x_1=2$  και  $x_2=-3$ .
8. Υπολογίστε το  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha x^2 + 5x - 2}{(x-1)^2}$  και να είναι πραγματικός αριθμός.
9. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\lambda x^2 + x - 6}{|x-2|}$ , να έχει όριο στο  $x_0=2$  πραγματικό αριθμό.

