ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ – ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. *Ορισμός*: Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ**, ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και F΄(x)=f(x) για κάθε x∈Δ.

2. *Θεώρημα*: Εάν F είναι παράγουσα της f σε διάστημα Δ, τότε:

- Η συνάρτηση G(x)=F(x)+c, c∈R σταθερά, είναι παράγουσα της f στο Δ.
- Κάθε παράγουσα της f στο Δ, έχει την μορφή G(x)=F(x)+c, c∈R.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι η αρχική συνάρτηση δεν είναι μοναδική. Η κλάση (σύνολο) όλων των αρχικών συναρτήσεων της συνάρτησης f, λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f.

Απόδειξη:

• Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x)= =F(x)+c, όπου c∈R, είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, αφού G′(x)=(F(x)+c)′=F′(x)= =f(x), για κάθε $x \in \Delta$.

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο *Δ*. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν F′(x)= =f(x) και G′(x)=f(x), οπότε G′(x)=*F*′(x), για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε G(x)=F(x)+c, για κάθε $x \in \Delta$.

3. Μια συνάρτηση F μπορεί να είναι αρχική της f σε ένα διάστημα Δ, χωρίς η F να παραγωγίζεται σε κάθε σημείο του Δ. Τότε πρέπει η F να είναι συνεχής στο Δ και η μη ύπαρξη παραγώγου να αφορά πεπερασμένο πλήθος σημείων του Δ. Πχ η F(x)=|x| είναι συνεχής στο R, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Είναι παράγουσα της $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & αν\ x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

4. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Εάν μια συνάρτηση έχει παράγουσα στο Δ, δεν σημαίνει ότι είναι συνεχής στο Δ. (βλ. παράδειγμα προηγούμενης παρατήρησης. Η f δεν είναι συνεχής στο R, έχει όμως παράγουσα την F.).

5. Ο ορισμός (1) ισχύει μόνο αν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων. (Ολοκλήρωμα Riemann). Πχ οι συναρτήσεις $F_1(x)=x^2$, x∈[0,1]U[2,3] και $F_2(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \in [0,1] \\ x^2 + 1, x \in [2,3] \end{cases}$ είναι παράγουσες της f(x)=2x, η διαφορά τους όμως $F_2(x) - F_1(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ -1, x \in [2,3] \end{cases}$ δεν είναι σταθερός αριθμός.

6. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν παράγουσα. Πχ η $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [1,2) \\ 2, x \in [2,3] \end{cases}$ και άλλες που η αρχική τους δεν μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις, πχ f(x)= $\frac{e^x}{x}$, $\frac{ημx}{x}$, $\frac{1}{lnx}$, $\frac{συνx}{x}$, e^{x^2}, xεφx, x^x, . . .

7. Από τον συμβολισμό των Leibniz και Lagrange, $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$, προκύπτει ότι df(x)=f΄(x)dx. Η συνάρτηση df(x) λέγεται **διαφορικό της f στο σημείο x**.

8. Εάν F, G αρχικές συναρτήσεις των f και g αντίστοιχα σε διάστημα Δ, και c σταθερός πραγματικός, τότε:

Συνάρτηση	Το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων
αf(x)	αF(x)+c, c∈R.
f(x)±g(x)	F(x)±G(x) +c, c∈R.
f΄(x)	f(x)+c, c∈R.
f΄(x)g(x)+f(x)g΄(x)	f(x)g(x)+c, c∈R.
$\frac{f'(\mathrm{x})g(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})g'(\mathrm{x})}{g^2(\mathrm{x})}$	$\frac{f(\mathrm{x})}{g(\mathrm{x})}$+c, c∈R, με g(x)≠0.
$\frac{f'(\mathrm{x})}{f^2(\mathrm{x})}$	$-\frac{1}{f(\mathrm{x})}$ + c, c∈R, με f(x)≠0.
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	lnf(x) +c, με f(x)>0, c∈R.
$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\sqrt{f(x)}$+c, c∈R.
f΄(x)$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$+c, c∈R.

$f^{\nu}(\chi)f'(x)$	$\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}$+c, c∈R.
f΄(x)ημf(x)	–συνf(x)+c, c∈R.
f΄(x)συνf(x)	ημf(x)+c, c∈R.
$a^{f(x)}f'(x)$	$\frac{\alpha^{f(x)}}{ln\alpha}$+c, c∈R, 0<α≠1.
$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$	εφf(x)+c, c∈R.
$\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$	-σφf(x)+c, c∈R.

9. ***Πίνακας απλών αρχικών συναρτήσεων:***

	f	F
1	f(x)=α, με x∈R	F(x)=αx+c, γιατί (αx+c)΄=α
2	f(x)=1 με x∈R	F(x)=x+c, γιατί (x+c)΄=1
3	f(x)=x^{ν} με x∈R και ν∈R-{-1}	F(x)=$\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c$ γιατί $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c\right)'=x^{\nu}$
4	f(x)=ημx, με x∈R	F(x)=-συνx+c γιατί (-συνx+c)΄=ημx
5	f(x)=συνx, με x∈R	F(x)=ημx+c, γιατί (ημx+c)΄=συνx
6	f(x)=$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, με x∈(κπ-π/2, κπ+π/2)	F(x)=εφx+c, γιατί (εφx+c)΄=1/συν^{2}x
7	f(x)= $\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, με x∈(κπ, κπ+π)	F(x)=-σφx+c, γιατί (-σφx+c)΄=1/ημ^{2}x
8	f(x)= e^x , με x∈R	F(x)= e^x +c, γιατί (e^x+c)΄= e^x
9	f(x)=$\frac{1}{\sqrt{x}}$, με x∈(0, +∞)	F(x)= $2\sqrt{x}+c$, γιατί $(2\sqrt{x}+c)'=\frac{1}{\sqrt{x}}$
10	f(x)=$\frac{1}{x}$, με x>0 f(x)= -$\frac{1}{x}$ με x<0	F(x)=lnx+c, γιατί (lnx+c)΄=1/x F(x)=- ln(-x)+c, γιατί (-ln(-x)+c)΄=-1/x
11	f(x)=α^x, με x∈R και 0<α≠1	F(x)=$\frac{\alpha^x}{\ln a}+c$ γιατί $\left(\frac{\alpha^x}{\ln a}+c\right)'=a^x$
12	f(x)=εφx, με x∈(κπ-(π/2),κπ+(π/2)), κ∈Z	F(x)=-lnσυνx+c, γιατί (-lnσυνx+c)΄= εφx
13	f(x)=σφx, με x∈(κπ,κπ+π), κ∈Z	F(x)=lnημx+c, γιατί (lnημx+c)΄= σφx

14	$f(x)=\frac{1}{\alpha^2-x^2}$, με x∈(-α,α), α>0.	F(x)= $\frac{1}{2\alpha}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+c$
15	f(x)=lnx, με x > 0.	F(x)=xlnx-x+c

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=x^3+$ημx+συνx, για κάθε x∈R και f(0)=0.
2. Να βρεθεί συνάρτηση f :(0,+∞)→R, για την οποία ισχύει $f'(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ για κάθε x∈(0,+∞) και f(1)=2.
3. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=3x\sqrt{x}$, για κάθε x≥0 και f(1)=1.
4. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=\frac{x^3+8}{x+2}$, για κάθε x≠2 και f(3)=12.
5. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει x(f΄(x)-συν2x)=xe^x-3, για κάθε x∈(0,+∞) και f(π)=e^π-3·lnπ+1.
6. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει f΄(x)ημ^{2}2x = -4συν2x, με x≠κπ+π/2 και x≠κπ, κ∈Z και $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$.
7. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει (x+2)f΄(x)=x+3, x>-2 και f(-1)=-1.
8. Δίνεται η συνάρτηση g(x)=e^{-2x}f(x) με f(x) παραγωγίσιμη στο R και f΄(x)=2f(x) για κάθε x∈R.
   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.
   ii. Αν f(1)=1, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.
9. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
   i. f΄(x)+xημx=συνx, x∈R και f(0)=2.
   ii. xf΄(x)+f(x)=2x, x∈(0,+∞) και f(1)=2.
   iii. f΄(x)συνx=2x+f(x)ημx, x≠κπ+$\frac{\pi}{2}$, κ∈R και f(π)=-π^2.
   iv. f: (0,+∞)→ (0,+∞) με f(x)lnf(x)=f΄(x), για κάθε x∈(0,+∞) και f(1)=1.
   v. f΄(x)=1+lnx, x>0 και f(e)=e.
   vi. $f'(x)=\frac{e^x}{x^2}-\frac{2}{x}f(x)$, x∈(0,+∞) και f(1)=e.
   vii. $f'(x)=\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{\ln x}$, x>1 και f(e)=0.
10. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
    i. f΄(x)=f(x)σφx και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
    ii. x(x^2+1)f΄(x) -1= -2x^{2}f(x), x>0 και f(1)=0.
    iii. $f'(x)=\frac{f(x)}{x-1}+e^x(x-1)$, x∈(1,+∞) και f(2)=e^2.
    iv. f΄(x)-2xe$^{-f(x)}$=0, x∈R και f(0)=0.
    v. f΄(x)+2xf(x)=0, x∈R με f(x)≠0 και f(0)=1.
    vi. f΄(x)+2xf^2(x)=0, x∈R με f(x)≠0 και f(0)=1.
11. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
    i. e^{-2x}f΄(x)f(x)-1=0 για κάθε x∈R και f(0)=1.
    ii. f΄(x)=e^{-2x}f^3(x), x∈R με f(x)≠0 και f(0)=-1.
12. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
    i. f: (0,+∞)→R παραγωγίσιμη στο (0,+∞), xf΄(x)+1=-2x^2(f(x)+lnx) στο (0,+∞) και f(1)=e^{-1}.
    ii. f: R→R παραγωγίσιμη στο R, f(0)=1, f(x)≠ x και (x^2+1)^2(f΄(x)-1)-x(f(x)-x)^3=0 για κάθε x∈R.
    iii. f΄(x)-1=2xe$^{x-f(x)}$, x∈R και f(0)=0.
    iv. f΄(x)-2x+2x(f(x)-x^2)=0, x∈R, f(0)=1, f(x)≠x^2 για κάθε x∈R.
    v. f΄(x)=e^x+e^x(f(x)-e^x)^2, x∈R, f(0)=0, f(x)≠e^x για κάθε x∈R.
    vi. (f(x)+2x)(f΄(x)+2)=4x, x∈R και f(0)=1.
    vii. (e^x+f(x)+xf΄(x))(e^x+xf(x))=x, x>0 και f(1)= =$\sqrt{2}$-e.
    viii. f: R→R, f(0)=0, e$^{f(x)}$≠ -x και f΄(x)e$^{f(x)}$+1= $=\frac{x}{x+e^{f(x)}}$ για κάθε x∈R.
    ix. f: R→R παραγωγίσιμη στο R, f(0)=2, f(x)≠e^x και f΄(x)+e^{2x}(f(x)-e^x)^3=e^x για κάθε x∈R.
13. Δίνεται συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο R, f(0)=2 και (x-1)f΄(x)=2x2-x-1, για κάθε x∈R. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.
14. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
    i. f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f(0)=f΄(0)=0 και (x^2+1)f΄΄(x)=2(1-xf΄(x)) για κάθε x∈R.
    ii. f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f(0)=1, f΄(0)=0, f(x)≠0 για κάθε x∈R και f(x)(f΄΄(x)+2f(x))=(f΄(x))^2 για κάθε x∈R.
    iii. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f(0)=f΄(0)=1 και f΄΄(x)=f(x) για κάθε x∈R.

iv. f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f(2)=e, f΄(0)=0, f(x)>0 για κάθε x∈R και f΄΄(x)-2xf΄(x)=2f(x) για κάθε x∈R.

v. f: (0,+∞)→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο (0,+∞), f(x)+(x-2)f΄(x)=xf΄΄(x) για κάθε x∈(0,+∞) και f(1)=e, f΄(1)=0.

vi. f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, 2f΄(0)=f(0)=1 και f΄΄(x)f(x)+(f΄(x))^2=f(x)f΄(x) για κάθε x∈R.

vii. f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f΄(0)=f(0)=e, f΄΄(x)f(x)-f(x)f΄(x)=(f΄(x))^2 και f(x)≠0 για κάθε x∈R.

viii. f: (0,+∞)→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο (0,+∞), 2xf΄(x)+x^{2}f΄΄(x)= -f΄(x) για κάθε x∈(0,+∞) και f(1)=-2f΄(1)=2.

ix. f: (0,+∞)→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο (0,+∞), f΄(x)=xf$\left(\frac{1}{x}\right)$…(1) για κάθε x>0 και f(1)=1.

x. f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f΄(0)=0, f(0)=1 και f΄΄(x)=f(x) για κάθε x∈R.

15. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f΄΄(x)-2f΄(x)+f(x)=e^x για κάθε x∈R και f(1)=$\frac{e}{2}$, f΄(1)=$\frac{3e}{2}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)= =x-$\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$, x∈R, είναι σταθερή.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

16. Δίνεται η συνάρτηση f: (0,π)→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f΄΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈(0,π) και f(π/2)=f΄(π/2)=1.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)= =f΄(x)ημx-f(x)συνx, x∈(0,π), είναι σταθερή.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

17. Δίνεται η συνάρτηση f: (0,+∞)→R παραγωγίσιμη στο (0,+∞), με xf΄(x)=$e^{\frac{1}{x}}$(x-1) για κάθε x∈(0,+∞) και f(1)=e. Να δείξετε ότι f(x)=x$e^{\frac{1}{x}}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f: (0,+∞)→R παραγωγίσιμη στο (0,+∞), με f΄(x)=$\frac{1}{1+x^2}$ για κάθε x>0 και f(1)=0. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)$=-f(x) για κάθε x>0.

19. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο R, με f΄(-x)f(x)=1 για κάθε x∈R και f(0)=1.

i. Να δείξετε ότι f(x)>0.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

20. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει η σχέση f(x+y)= =f(x)+f(y)+x^{2}y+xy^2, για κάθε x,y∈R και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$=1. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

21. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει η σχέση

f(x+y)=f(x)f(y)……….(1)

για κάθε x,y∈R. Αν f(x)≠0 για κάθε x∈R και f(1)=e, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

22. Να βρεθεί συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει f(0)=1 και $\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$=f(x)+1 για κάθε x∈R.

23. Να βρεθεί συνάρτηση f: R→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει 2f(0)=f΄(0)=2 και $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-2h)}{h}$ = =2f΄(x) για κάθε x∈R.

24. Δίνεται συνάρτηση f: (0,+∞)→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει f(1)=1 και f(x) $f'\left(\frac{1}{x}\right)$=x για κάθε x>0. Να δείξετε ότι f(x)=x, x>0.

25. Δίνεται συνάρτηση f: R→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει f(0)=1 και f(x)f΄(-x)=2 για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(x)=e^{2x}, x∈R.

26. Έστω F μια αρχική της f(x)=$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(F(x+1)-F(x))$.

27. END