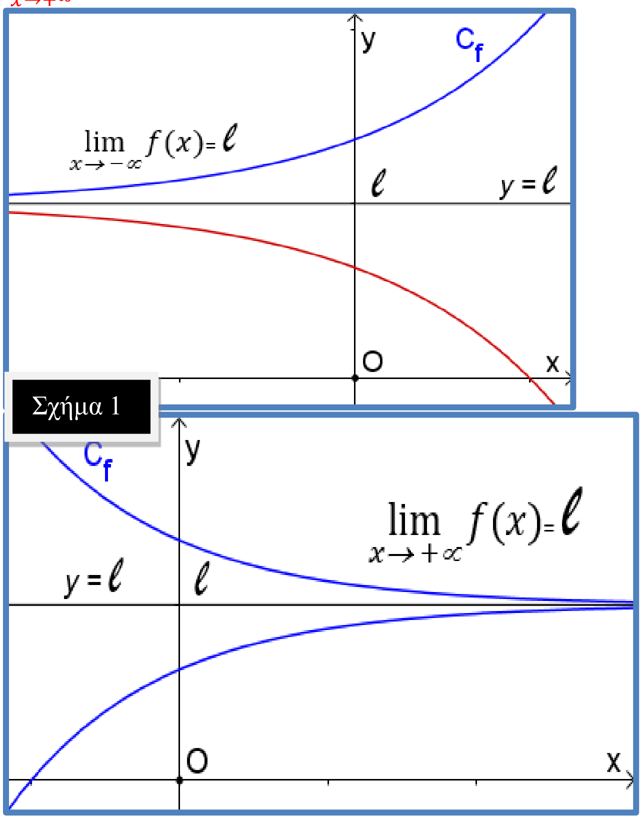
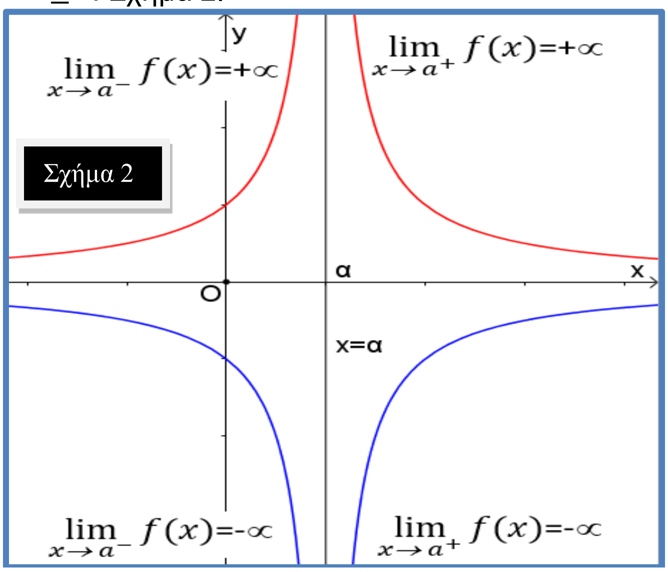
ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

1) Η ευθεία **y=β** λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτος της C$_f$ στο -∝** (**+∝**), αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\beta$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$). Σχήμα 1.



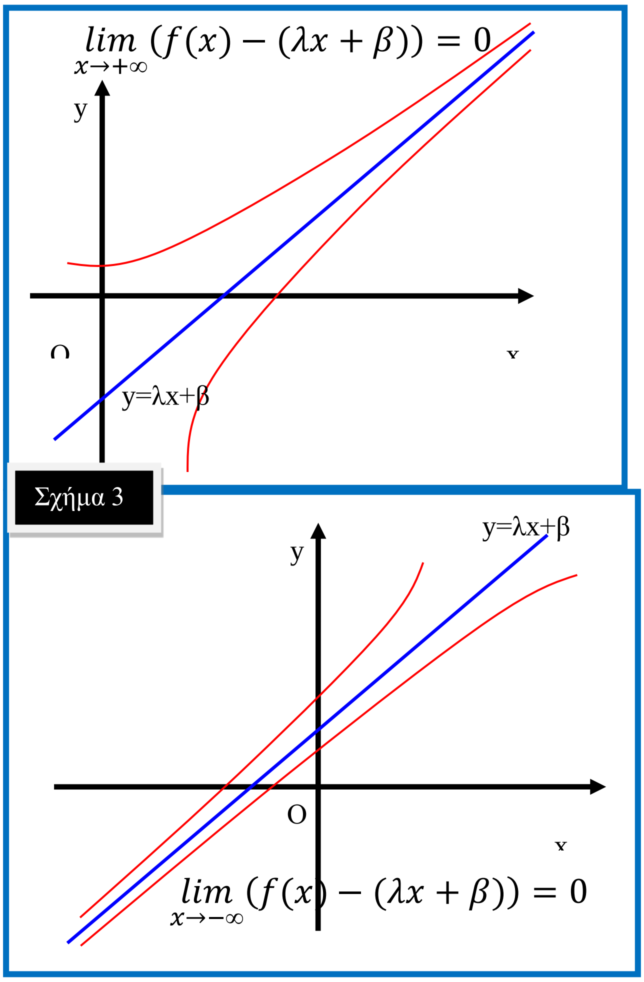
Σχήμα 1

2) Η ευθεία **x=α** λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτος της C$_f$** αν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=\pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)=\pm\infty$. Σχήμα 2.



Σχήμα 2

3) Η ευθεία **y=λx+β** λέγεται **πλάγια ασύμπτωτος** της C$_f$ **στο +∝** (**αντίστοιχα στο -∝**), αν $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(\lambda x+\beta))=0$ ή **αντίστοιχα** $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(\lambda x+\beta))=0$. Σχήμα 2.



Σχήμα 3

4) *Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε*:

☛ Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

☛ Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η *f* δεν είναι συνεχής.

☛ Στο +∞, −∞, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α,+∞), αντιστοίχως (−∞,*α*).

5) Για να δείξουμε ότι η ευθεία y=λx+β είναι πλάγια ασύμπτωτος της C$_f$ υπολογίζουμε το όριο της διαφοράς f(x)-(λx+β) όταν x→+∞ ή x→-∞ και πρέπει κάποιο από αυτά τα όρια να είναι μηδέν.

6) Όταν μας δίνουν μια συνάρτηση, για να βρούμε την πλάγια ασύμπτωτο:

α) Υπολογίζουμε το $\lambda=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, λ∈IR.

β) Υπολογίζουμε το $\beta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-\lambda x]$, β∈IR οπότε έχουμε προσδιορίσει την y=λx+β.

7) Δεν θα βρίσκουμε ταυτόχρονα τα όρια όταν x→±∞ παρά μόνο αν είμαστε σίγουροι ότι τα όρια είναι ίσα, γιατί πολλές φορές είναι διαφορετικά (Άσκηση 1, 2i),

8) Εάν λ=0, τότε η πλάγια ασύμπτωτος είναι οριζόντια. Έτσι υπολογίζοντας τις πλάγιες ασύμπτωτες, μας προκύπτουν και οι οριζόντιες αν υπάρχουν. Αν λ ή β=±∞, δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες,

9) Αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτος στο +∞ (**ή -∞**), δεν υπάρχει πλάγια στο +∞ (**ή -∞ αντίστοιχα**), (άσκηση 2ii, 2iv)

10) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες, γιατί $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

11) έστω $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, Q(x)≠0 ρητή συνάρτηση .

i) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, η ευθεία y=0 (άξονας x΄Ox) είναι οριζόντια ασύμπτωτος.

ii) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή, η ευθεία $y = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, όπου α_ν, β_ν οι είναι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των P(x) και Q(x) αντίστοιχα, είναι οριζόντια ασύμπτωτος.

iii) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, τότε υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

iv) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά 2 και πλέον μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, τότε δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

v) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την $x=x_0$, μόνο αν το x_0 είναι ρίζα του Q(x) και όχι ρίζα του P(x).

12) η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha P(x)$, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την $x=x_0$, όπου x_0 είναι (αν υπάρχει) ρίζα του P(x), γιατί $\lim\limits_{P(x)\to 0^+} \log_a P(x) = \pm\infty$. π.χ. η f(x)=lnx έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την x=0 γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty$.

13) η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{P(x)}$, έχει οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία $y=y_0$, αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a^{P(x)} = y_0$, π.χ. η $f(x)=e^x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτο x=0 γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

14) η f(x)=εφP(x) έχει κατακόρυφες ασύμπτωτους τις ρίζες (αν έχει) της εξίσωσης P(x)=κπ±π/2, κ∈Z.

15) η f(x)=σφP(x) έχει κατακόρυφες ασύμπτωτους τις ρίζες (αν έχει) της εξίσωσης P(x)=κπ, κ∈Z.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$.

2) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

i) $h(x) = \frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$,

ii) $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$,

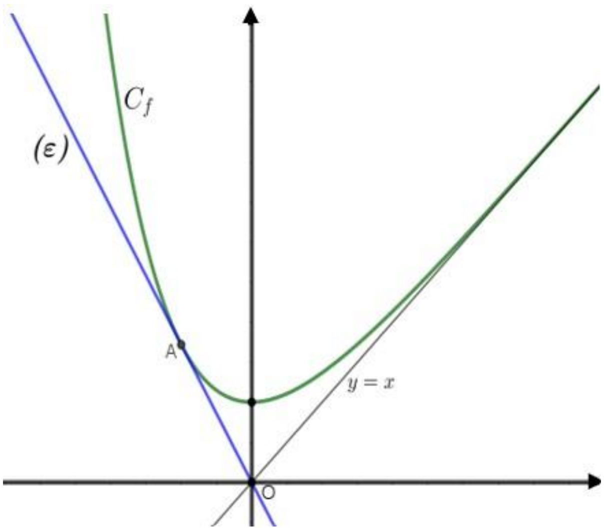
iii) $\sigma(x) = \ln(x^3 - 3x^2 + 4)$

iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{3x^2+1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

3) Να υπολογίσετε τα α, β∈IR ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2+\beta x+1}{x+1}$, να έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞ την ευθεία y=x-2 . Στην συνέχεια να βρεθούν οι άλλες ασύμπτωτες.

4) **23530-2:** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο IR συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$. (Μονάδες 8)

5) **25748-2:** Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο IR της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$. (Μονάδες 8)

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$. (Μονάδες 9)

6) END.