ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ εφόσον υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ εφόσον υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$πεπερασμένο ή άπειρο.

3) Οι παραπάνω κανόνες ισχύουν και στην περίπτωση που $x\to x_0^+$ ή $x\to x_0^-$.

4) Δεν πρέπει να μπερδεύουμε τους λόγους $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$,

5) Εάν το όριο δεν είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, τότε η εφαρμογή του κανόνα de l' Hospital, οδηγεί σε λάθος αποτέλεσμα.

6) Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$εφόσον υπάρχει ……κλπ.

7) Εάν το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

8) Μερικές φορές ο κανόνας de l' Hospital, οδηγεί σε φαύλο κύκλο.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\underset{DLH}{=}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\underset{DLH}{=}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=$

= …….

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

=……

Σε αυτές τις περιπτώσεις ο παλιός τρόπος υπολογισμού του ορίου είναι προτιμητέος και ο μόνος που οδηγεί στην εύρεση του ορίου.

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$=\sqrt{1+0}=1.$

9) Σε πολύπλοκες μορφές απομονώνουμε τις παραστάσεις που δημιουργούν την απροσδιοριστία και εφαρμόζουμε σε αυτές τον κανόνα.

10) Στις εφαρμογές που χρησιμοποιούμε τον κανόνα, δεν θα ελέγχουμε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται.

11) Μορφή (±∞)0

$$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]\overset{(\pm\infty)0}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)\text{ή }\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}=\ldots..$$

(Άσκηση 2a)

12) Μορφή (+∞)-(+∞)

$$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)\right]$$

$$=+\infty(\kappa-1),$$

όπου $\kappa=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

☛ Αν κ≠1 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\pm\infty$.

(Άσκηση 2b)

☛ Αν κ=1 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=(+\infty)\cdot 0$ που είναι η μορφή (9). (Άσκηση 2c)

13) Μορφές 0^0, $1^{+\infty}$ και $(+\infty)^0$

Θέτουμε $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$και υπολογίζουμε το όριο g(x)lnf(x) που είναι μορφή 0(-∞), (+∞)0 και 0(+∞) αντίστοιχα.

(Ασκήσεις 2d, 2e, 2f)

14) Πολλές φορές μέσα σε ένα όριο, υπάρχουν περισσότερες από μια απροσδιόριστες μορφές. Υπολογίζουμε ξεχωριστά το καθένα όριο (άσκηση 12).

15) Όταν σε ένα όριο υπάρχουν παράγοντες που δεν οδηγούν σε απροσδιοριστία, απομονώνουμε τους παράγοντες αυτούς σε δικό τους όριο (άσκηση 13).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Υπολογίστε τα όρια:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2+3x-4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3-5e^{x-1}}{x^3+x^2+x-3}$.

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$.

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$.

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$.

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 7x}$.

l) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$.

m) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{2x-\pi}$.

n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}$.

o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$.

p) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln^2 x}{x}$.

q) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1+lnx}$.

r) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

s) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx}{x^3}$.

2) Υπολογίστε τα όρια:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\,ln\,x)$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-ln\,x)$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

3) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, x>0.

4) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2-1}$.

5) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^3}{ln\,x}$.

6) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}$.

7) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$.

8) <u>ΘΕΜΑ 2ον (2001)</u>

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2, & x\le 3\\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3\end{cases}$. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

Μονάδες 9

9) <u>ΘΕΜΑ 2ον (2004)</u>

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

10) <u>ΘΕΜΑ 3ον (1983)</u>: Έστω η συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [0,+∞) με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x} & \text{εάν } 0<x\neq 1\\ 0 & \text{εάν } x=0\\ -1 & \text{εάν } x=1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της,

ii) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1)

11. <u>Θέμα 3ον θετική -τεχνολογική 2008</u>:

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}x\,ln\,x & \text{αν } x>0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0. Μονάδες 3

Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 9

ii) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

12) Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{(1-e^{x})(e^{\varepsilon\varphi x}-e^{x})}{\eta\mu x\cdot(\varepsilon\varphi x-x)}$, στο $x_0=0$.

13) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu 2x)}{\ln(\eta\mu x)}$.

14) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

15) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

16) **24755-2:** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases},$$

η οποία είναι συνεχής στο IR.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$. (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$. (Μονάδες 5)

17) **28314-4:** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : $[1,+\infty)\to$ IR με $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{\lambda x+1}}, & x>1\\ 0, & x=1\end{cases}$, $\lambda\in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-1$. (Μονάδες 6)

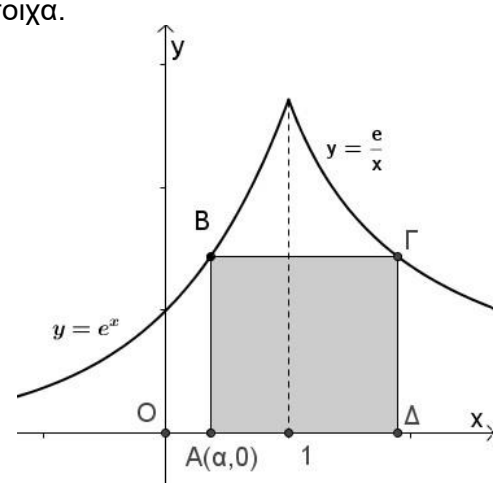
β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Μονάδες 5)

18) **28342-4:** Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα x′x και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^{x}$, $x<1$ και $g(x)=\frac{e}{x}$, $x>1$, αντίστοιχα.



Έστω $A(\alpha,0)$ με $\alpha<1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta=e^{1-\alpha}$,

(Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha)=e-\alpha e^{\alpha}$, $\alpha<1$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

(Μονάδες 6)

19) **29130-4:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x, x\in$IR.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 4)

ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Για τη συνάρτηση g : IR → IR ισχύει ότι $g(x)-x=ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

(Μονάδες 5)

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y=x$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 6)

20) **29927-4:**

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1)∪(1, +∞) → IR με $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (Μονάδες 6)

β)

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 9)

21) 31547-2: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι:

i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

22) 31746-4: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x,\ x \in \mathrm{IR}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0, f(0))$. (Μονάδες 5)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 2x + 6$ για κάθε $x \in$ IR. (Μονάδες 5)