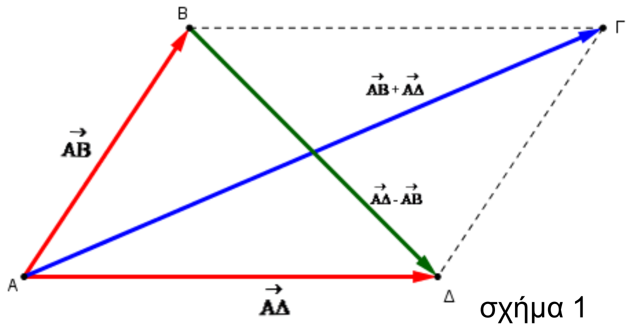
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ - ΜΕΤΡΟ

1) ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Τα διανύσματα έχουν τρία χαρακτηριστικά. Το **μέτρο** (αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης) την **διεύθυνση** (ή φορέας) που είναι η ευθεία που πάνω της βρίσκεται το διάνυσμα καθώς και κάθε παράλληλή της και την **φορά**. Υπάρχουν δυο φορές, η θετική (+) και η αρνητική (-) οι οποίες ορίζονται αυθαίρετα. Η διεύθυνση και η φορά, λέγονται **κατεύθυνση** του διανύσματος.



σχήμα 1

2) Εάν τα διανύσματα έχουν ίδια αρχή (σχήμα 1), τότε η μια διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι το άθροισμά τους, και η άλλη διαγώνιος είναι η διαφορά τους.

3) Εάν για τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ του επιπέδου ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

4) Εάν $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, τότε τα σημεία Α και Β ταυτίζονται (Α ≡ Β).

5) Εάν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma B}$, τότε τα σημεία Α και Γ ταυτίζονται (Α ≡ Γ).

6) Εάν Ο τυχαίο σημείο αναφοράς, τότε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

7) Εάν Ο τυχαίο σημείο αναφοράς, τότε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}$.

8) $\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

Η ισότητα $|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ ισχύει, αν και μόνο αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

Η ισότητα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ ισχύει, αν και μόνο αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

2) ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. Να κατασκευάσετε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1, ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma_1}=\overrightarrow{BA}$.

2) Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ και τα σημεία Δ και Ε που ορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

3) Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και το μέσο Μ της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}$.

4) Δυο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄ΓΔ έχουν κοινές κορυφές τις Γ και Δ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ είναι παραλληλόγραμμο.

5) Δυο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΒ΄ΓΔ΄ έχουν κοινές κορυφές τις Α και Γ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΒ΄ΔΔ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

6) Πάνω στην πλευρά ΑΒ και στην διαγώνιο ΑΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Μ και Ν. Να κατασκευάσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{\Gamma N}$ και να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΕΝ είναι παραλληλόγραμμο.

7) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ. Έστω επίσης σημείο Μ που ορίζεται από την σχέση $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

8) Για τα σημεία Α, Β, Γ και Δ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\mathrm{B\Delta}}$ και $\vec{\mathrm{EB}}=\vec{\mathrm{\Delta A}}$. Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΕΓ.

9) Σε τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{\mathrm{A\Delta}}=\vec{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{BE}}=\vec{\mathrm{A\Gamma}}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

10) Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{\mathrm{\Gamma E}}=\vec{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{AZ}}=\vec{\mathrm{BA}}$. Να δείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΕΖ.

11) Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και για τα σημεία Δ και Ε ισχύει $\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\mathrm{A\Delta}}+\vec{\mathrm{AE}}$, να αποδείξετε ότι: **α)** Το Μ είναι μέσο του ΔΕ και

β) για κάθε άλλο σημείο Ρ ισχύει $\vec{\mathrm{PB}}+\vec{\mathrm{P\Gamma}}=\vec{\mathrm{P\Delta}}+\vec{\mathrm{PE}}$.

12) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ και Δ του επιπέδου, ισχύει:

$$\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{\Gamma A}}=\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}-\vec{\mathrm{B\Gamma}}+\vec{\mathrm{\Delta\Gamma}}.$$

13) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του επιπέδου, ισχύει:

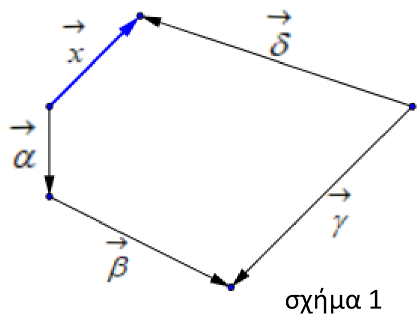
$$\vec{\mathrm{A\Delta}}+\vec{\mathrm{BE}}+\vec{\mathrm{\Gamma Z}}=\vec{\mathrm{AE}}+\vec{\mathrm{BZ}}+\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}.$$

14) Εάν τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{\Gamma A}}$ και $\vec{v}=\vec{\mathrm{KB}}+\vec{\mathrm{\Gamma\Lambda}}$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται.

15) Αν ισχύει η ισότητα $\vec{\mathrm{PA}}+\vec{\mathrm{PB}}=\vec{\mathrm{\Sigma A}}+\vec{\mathrm{\Sigma B}}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

16) Εάν είναι $|\vec{\alpha}|=\dfrac{3}{4}$, $|\vec{\beta}|=\dfrac{1}{4}$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 1$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$ είναι ομόρροπα.

17) Στο σχήμα 1, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$, ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.



σχήμα 1

18) Εάν σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει $\vec{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Delta}}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

19) Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=5$ και $|\vec{\gamma}|=8$, να αποδείξετε ότι:

i) $3\leq|\vec{a}+\vec{\beta}|\leq 7$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\neq\vec{0}$.

20) Εάν $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|+|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Β μεταξύ των Α και Γ.

21) Εάν $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|-|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Γ μεταξύ των Α και Β.

22) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $\hat{\mathrm{A}}=120^0$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i) $(\widehat{\vec{BA},\vec{A\Delta}})$.

ii) $(\widehat{\vec{\mathrm{A\Gamma}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}})$.

iii) $(\widehat{\vec{\mathrm{\Gamma A}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}})$.

iv) $(\widehat{\vec{\mathrm{OA}},\vec{\mathrm{B\Delta}}})$.

23) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και (ΑΓ)=2(ΒΓ). Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i) $(\widehat{\vec{AO},\vec{AB}})$.

ii) $(\widehat{\vec{B\Delta},\vec{AB}})$.

iii) $(\widehat{\vec{OB},\vec{\Gamma O}})$.

iv) $(\widehat{\vec{O\Gamma},\vec{\Delta O}})$.

24) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i) $(\widehat{\vec{A\Gamma},\vec{AB}})$.

ii) $(\widehat{\vec{AB},\vec{\Theta\Gamma}})$.

iii) $(\widehat{\vec{B\Gamma},\vec{AB}})$.

iv) $(\widehat{\vec{B\Theta},\vec{\Theta\Gamma}})$.

25) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο και Μ σημείο τέτοιο ώστε $\vec{A\Gamma}+\vec{M\Delta}-\vec{M\Gamma}-\vec{MA}-\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}+\vec{B\Gamma}$, να δείξετε ότι το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.

26) Ομοίως εάν $\vec{AM}-\vec{M\Delta}-\vec{\Delta A}=\vec{AB}+\vec{\Gamma M}-\vec{\Gamma\Delta}-\vec{\Delta B}$.

27) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο, να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία είναι:

i) $|\vec{MB}-\vec{AM}+\vec{B\Gamma}-\vec{M\Gamma}|=2$.

ii) $|\vec{MB}-\vec{AM}-\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma M}|=|\vec{MA}-\vec{BM}+\vec{\Delta M}-\vec{\Delta A}|$

28) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ και ΑΓΘΙ. Να αποδείξετε ότι $\vec{\Delta H}+\vec{Z\Theta}+\vec{IE}=\vec{0}$.

29) Τρία κινητά Α, Β και Γ κινούνται στο επίπεδο και για τις ταχύτητές τους $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{\upsilon}_B$, και $\vec{\upsilon}_\Gamma$ ισχύουν τα εξής:

- $\vec{\upsilon}_A+\vec{\upsilon}_B-\vec{\upsilon}_\Gamma=\vec{0}$.
- Το μέτρο της ταχύτητας του Α είναι σταθερό και ίσο με τα $\frac{10}{3}$ του μέτρου της ταχύτητας του Β και με τα $\frac{10}{7}$ του μέτρου της ταχύτητας του Γ.

Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια Β και Γ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

30) Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{7}=\frac{|\vec{\gamma}|}{10}$, να δείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

ii) $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.

31) aerafa