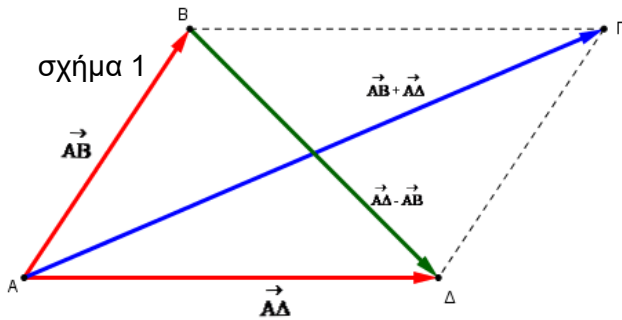


## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ - ΜΕΤΡΟ

## 1) ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Τα διανύσματα έχουν τρία χαρακτηριστικά. Το **μέτρο** (αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης) την **διεύθυνση** (ή φορέας) που είναι η ευθεία που πάνω της βρίσκεται το διάνυσμα καθώς και κάθε παράλληλή της και την **φορά**. Υπάρχουν δυο φορές, η θετική (+) και η αρνητική (-) οι οποίες ορίζονται αυθαίρετα. Η διεύθυνση και η φορά, λέγονται **κατεύθυνση** του διανύσματος.



- 2) Εάν τα διανύσματα έχουν ίδια αρχή (σχήμα 1), τότε η μια διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι το άθροισμά τους, και η άλλη διαγώνιος είναι η διαφορά τους.

## 2) ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να κατασκευάσετε τα σημεία A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub> και Γ<sub>1</sub>, ώστε να ισχύουν  $\vec{AA}_1 = \vec{B\Gamma}$ ,  $\vec{AB}_1 = \vec{AB} - \vec{A\Gamma}$  και  $\vec{A\Gamma}_1 = \vec{BA}$ .
- 2) Δίνονται τα σημεία A, B και Γ και τα σημεία Δ και E που ορίζονται από τις σχέσεις  $\vec{\Gamma\Delta} + \vec{AB} = \vec{0}$  και  $\vec{\Gamma E} + \vec{BA} = \vec{0}$ . Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔE.
- 3) Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ, Δ και το μέσο M της AΓ. Να αποδείξετε ότι  $\vec{MB} + \vec{M\Delta} = \vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B}$ .
- 4) Δυο παραλληλόγραμμα ABΓΔ και A'B'ΓΔ έχουν κοινές κορυφές τις Γ και Δ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABB'A' είναι παραλληλόγραμμο.
- 5) Δυο παραλληλόγραμμα ABΓΔ και AB'ΓΔ' έχουν κοινές κορυφές τις A και Γ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο BB'ΔΔ' είναι παραλληλόγραμμο.
- 6) Πάνω στην πλευρά AB και στην διαγώνιο AΓ παραλληλογράμμου ABΓΔ, παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία M και N. Να κατασκευάσετε τα διανύσματα  $\vec{\Gamma E} = \vec{AM}$  και  $\vec{AZ} = \vec{\Gamma N}$  και να δείξετε ότι το τετράπλευρο ZMEN είναι παραλληλόγραμμο.

- 3) Εάν για τέσσερα σημεία A, B, Γ και Δ του επιπέδου ισχύει  $\vec{AD} = \vec{B\Gamma}$ , τότε το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

- 4) Εάν  $\vec{AB} = \vec{0}$ , τότε τα σημεία A και B ταυτίζονται ( $A \equiv B$ ).

- 5) Εάν  $\vec{AB} = \vec{\Gamma B}$ , τότε τα σημεία A και Γ ταυτίζονται ( $A \equiv \Gamma$ ).

- 6) Εάν O τυχαίο σημείο αναφοράς, τότε  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ .

- 7) Εάν O τυχαίο σημείο αναφοράς, τότε  $\vec{AB} = \vec{AO} - \vec{BO}$ .

- 8)  $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

Η ισότητα  $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$  ισχύει, αν και μόνο αν  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ .

Η ισότητα  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$  ισχύει, αν και μόνο αν  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ .

- 7) Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τυχαίο σημείο P της BΓ. Έστω επίσης σημείο M που ορίζεται από την σχέση  $\vec{PM} = \vec{AP} + \vec{PB} + \vec{P\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABMΓ είναι παραλληλόγραμμο.

- 8) Για τα σημεία A, B, Γ και Δ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις  $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$  και  $\vec{EB} = \vec{\Delta A}$ . Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσο του EΓ.

- 9) Σε τρίγωνο ABΓ κατασκευάζουμε τα διανύσματα  $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$  και  $\vec{BE} = \vec{A\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔE.

- 10) Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ κατασκευάζουμε τα διανύσματα  $\vec{\Gamma E} = \vec{B\Gamma}$  και  $\vec{AZ} = \vec{BA}$ . Να δείξετε ότι το Δ είναι μέσο του EZ.

- 11) Αν M το μέσο της πλευράς BΓ τριγώνου ABΓ και για τα σημεία Δ και E ισχύει  $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{A E}$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το M είναι μέσο του ΔE και

β) για κάθε άλλο σημείο P ισχύει  $\vec{PB} + \vec{P\Gamma} = \vec{P\Delta} + \vec{P E}$ .

- 12) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ και Δ του επιπέδου, ισχύει:

$$\vec{AB} + \vec{\Gamma A} = \vec{\Gamma\Delta} - \vec{B\Gamma} + \vec{\Delta\Gamma}.$$

13) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ και Ε του επιπέδου, ισχύει:

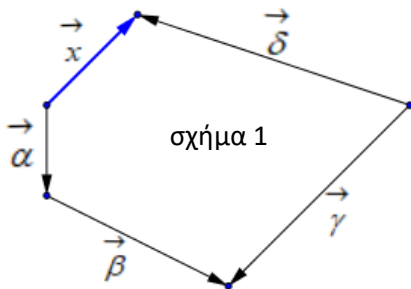
$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{ΓZ} = \vec{AE} + \vec{BZ} + \vec{ΓΔ}.$$

14) Εάν τα διανύσματα  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{ΓA}$  και  $\vec{v} = \vec{KB} + \vec{ΓA}$  είναι ίσα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται.

15) Αν ισχύει η ισότητα  $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{ΣA} + \vec{ΣB}$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

16) Εάν είναι  $|\vec{α}| = \frac{3}{4}$ ,  $|\vec{β}| = \frac{1}{4}$  και  $|\vec{α} + \vec{β}| \geq 1$ , να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $|\vec{α}|$  και  $|\vec{β}|$  είναι ομόρροπα.

17) Στο σχήμα 1, να εκφράσετε το διάνυσμα  $\vec{x}$ , ως συνάρτηση των  $\vec{α}, \vec{β}, \vec{γ}$  και  $\vec{δ}$ .



18) Εάν σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει  $\vec{ΑΓ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΑΔ}$ , να δείξετε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

19) Εάν για τα διανύσματα  $\vec{α}, \vec{β}$  και  $\vec{γ}$  ισχύει  $|\vec{α}| = 2$ ,  $|\vec{β}| = 5$  και  $|\vec{γ}| = 8$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $3 \leq |\vec{α} + \vec{β}| \leq 7.$

ii)  $\vec{α} + \vec{β} - \vec{γ} \neq \vec{0}.$

20) Εάν  $|\vec{ΑΓ}| = |\vec{ΑΒ}| + |\vec{ΒΓ}|$ , να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Β μεταξύ των Α και Γ.

21) Εάν  $|\vec{ΑΓ}| = |\vec{ΑΒ}| - |\vec{ΒΓ}|$ , να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Γ μεταξύ των Α και Β.

22) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και  $\hat{A} = 120^\circ$ . Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i)  $(\vec{BA}, \vec{AD}).$

iii)  $(\vec{ΓA}, \vec{BΓ}).$

ii)  $(\vec{ΑΓ}, \vec{BΓ}).$

iv)  $(\vec{ΟA}, \vec{BΔ}).$

23) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και  $(ΑΓ) = 2(ΒΓ)$ . Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i)  $(\vec{AO}, \vec{AB}).$

iii)  $(\vec{OB}, \vec{ΓO}).$

ii)  $(\vec{BΔ}, \vec{AB}).$

iv)  $(\vec{ΟΓ}, \vec{ΔO}).$

24) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i)  $(\vec{ΑΓ}, \vec{AB}).$

iii)  $(\vec{BΓ}, \vec{AB}).$

ii)  $(\vec{AB}, \vec{ΘΓ}).$

iv)  $(\vec{BΘ}, \vec{ΘΓ}).$

25) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο και Μ σημείο τέτοιο ώστε  $\vec{ΑΓ} + \vec{ΜΔ} - \vec{ΜΓ} - \vec{ΜΑ} - \vec{ΑΒ} = \vec{ΓΔ} + \vec{BΓ}$ , να δείξετε ότι το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.

26) Ομοίως εάν  $\vec{ΑΜ} - \vec{ΜΔ} - \vec{ΔΑ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΓΜ} - \vec{ΓΔ} - \vec{ΔB}$ .

27) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο, να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία είναι:

i)  $|\vec{MB} - \vec{AM} + \vec{BΓ} - \vec{MΓ}| = 2.$

ii)  $|\vec{MB} - \vec{AM} - \vec{ΓB} + \vec{ΓM}| = |\vec{MA} - \vec{BM} + \vec{ΔM} - \vec{ΔA}|.$

28) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ και ΑΓΘΙ. Να αποδείξετε ότι  $\vec{ΔH} + \vec{ZΘ} + \vec{IE} = \vec{0}.$

29) Τρία κινητά Α, Β και Γ κινούνται στο επίπεδο και για τις ταχύτητές τους  $\vec{v}_A, \vec{v}_B,$  και  $\vec{v}_Γ$  ισχύουν τα εξής:

•  $\vec{v}_A + \vec{v}_B - \vec{v}_Γ = \vec{0}.$

• Το μέτρο της ταχύτητας του Α είναι σταθερό και ίσο με τα  $\frac{10}{3}$  του μέτρου της ταχύτητας του Β και με τα  $\frac{10}{7}$  του μέτρου της ταχύτητας του Γ.

Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια Β και Γ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

30) Εάν για τα διανύσματα  $\vec{α}, \vec{β}$  και  $\vec{γ}$  ισχύει  $\vec{α} + \vec{β} + \vec{γ} = \vec{0}$  και  $\frac{|\vec{α}|}{3} = \frac{|\vec{β}|}{7} = \frac{|\vec{γ}|}{10}$ , να δείξετε ότι:

i)  $\vec{α} \uparrow \uparrow \vec{β}.$

ii)  $\vec{β} \uparrow \downarrow \vec{γ}.$

31) END.