ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. *Ορισμός*: Έστω *Α* ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το *Α*** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο x∈A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με ***f*(*x*)**.

Για να εκφράσουμε την διαδικασία αυτή, γράφουμε: f: A→R ή

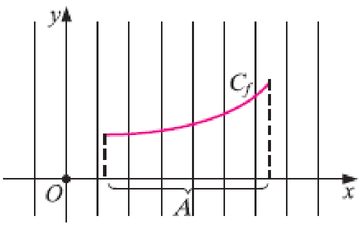
x→f(x)

2. *Ορισμός*: Έστω f: A→R και B⊆A. Το σύνολο {y∈R/y=f(x) για κάποιο x∈B}, θα συμβολίζουμε με *f*(B) και θα ονομάζεται **σύνολο τιμών της f σε κάθε x∈B**. Ειδικά το f(A)={y∈R/y=f(x) για κάποιο x∈A}, ονομάζεται **σύνολο τιμών** της f.

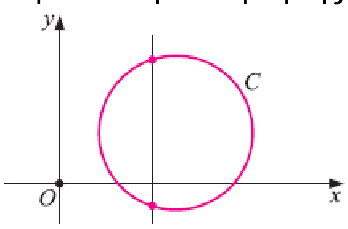
3. Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *Α* και *Oxy* ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων *Μ*(*x*,*y*) για τα οποία ισχύει *y*=*f* (*x*), δηλαδή το σύνολο των σημείων *Μ*(*x*,*f*(*x*)), *x*∈*A*, λέγεται **γραφική παράσταση** της *f* και συμβολίζεται με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, *y*=*f* (*x*) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f .

Επομένως, η *y*=*f* (*x*) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f*.

4. Επειδή κάθε *x*∈*A* αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο *y*∈R, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της *f* με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ ένα κοινό σημείο.**

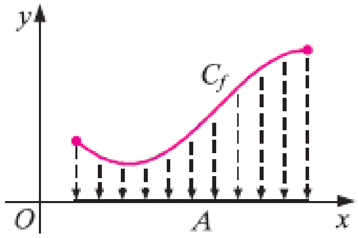


Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

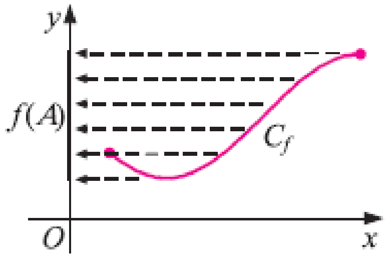


5. *Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:*

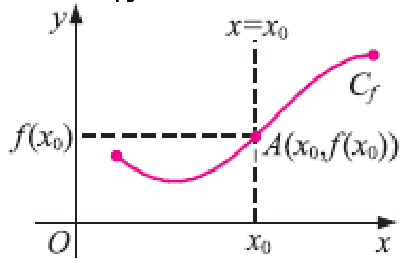
α) Το πεδίο ορισμού της *f* είναι το σύνολο *Α* των τετμημένων των σημείων της C_f .



β) Το σύνολο τιμών της *f* είναι το σύνολο *f* (*A*) των τεταγμένων των σημείων της C_f.



γ) Η τιμή της *f* στο x_0∈A, είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x=x_0$ και της C_f.



6. *Ορισμός*: Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού *Α* και
- για κάθε x∈A ισχύει f(x) = g(x).

7. *Ορισμός*: Έστω f: A→R και g: B→R δυο συναρτήσεις. Ορίζουμε ως άθροισμα ***f*+*g***, διαφορά ***f* – *g***, γινόμενο ***fg*** και πηλίκο $^{\mathbf{f}}/_{\mathbf{g}}$ τις συναρτήσεις με τύπους:

(f+g)(x)=f(x)+g(x)

(f–g)(x)=f(x)–g(x)

(f·g)(x)=f(x)·g(x) και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των f+g, f–g και f·g είναι η τομή A∩B των πεδίων ορισμού *Α* και *Β* των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$, είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή g(x), δηλαδή το σύνολο {x/x∈A και x∈B , με g(x)≠0}.

8. Μια συνάρτηση είναι πλήρως ορισμένη, αν δίνεται ο τύπος της αντιστοίχισης και το πεδίο ορισμού της. Πχ αν $f(x)=3x^2-3$, $x\in[3,5)$, το πεδίο ορισμού της είναι το A_f =[3,5), Αν $f(x)=\begin{cases}1-2x, & αν\ x\le 1\\ x^2-x, & αν\ x>3\end{cases}$, το πεδίο ορισμού της είναι το A_f =(-∞,1]U(3,+∞).

9. Όταν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού, τότε ως πεδίο ορισμού θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του R, στο οποίο έχει νόημα ο τύπος της. Μερικές βασικές περιπτώσεις είναι:
(Στα παρακάτω P(x), Q(x) είναι πολυώνυμα του x).
   a. ***Πολυωνυμική συνάρτηση*** f(x)=P(x).Τότε A_f=R.
   b. ***Ρητή συνάρτηση*** $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$. Τότε A_f ={x∈R/Q(x)≠0}.
   c. ***Άρρητη συνάρτηση*** $f(x)=\sqrt{P(x)}$. Τότε A_f ={x∈R/P(x)≥0}.
   d. ***Λογαριθμική συνάρτηση*** f(x)=lnP(x) και f(x)=logP(x). Τότε A_f ={x∈R/P(x)>0}.
   e. ***Εκθετική συνάρτηση*** $f(x)=P(x)^{Q(x)}$. Τότε A_f ={x∈R/1≠P(x)>0}.
   f. f(x)=ημP(x) και g(x)=συνP(x). Τότε A_f=R.
   g. f(x)=εφP(x). Τότε A_f={x∈R/P(x)≠κπ+π/2, κ∈Z}.
   h. f(x)=σφP(x). Τότε A_f={x∈R/P(x)≠κπ, κ∈Z}.
   i. συνδυασμοί των παραπάνω.

10. Η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον άξονα των y΄Oy, μόνο όταν 0∈A_f. Το σημείο τομής είναι το A(0,f(0)). Η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον άξονα των x΄Ox στα σημεία που οι τετμημένες τους είναι λύση της εξίσωσης f(x)=0.

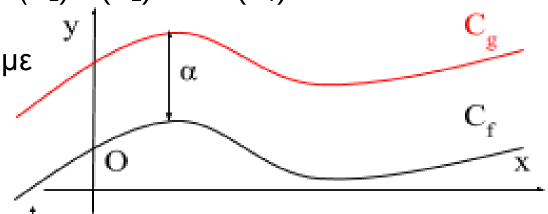
11. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f και g – αν υπάρχουν – έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης f(x)=g(x). Για να βρούμε την τεταγμένη ενός τέτοιου σημείου, βάζουμε την τετμημένη του στον τύπο της f ή της g (το ίδιο είναι).

12. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι πάνω **(κάτω)** από τον άξονα των x΄Ox, λύνουμε την ανίσωση f(x)>0 (**f(x)<0**).

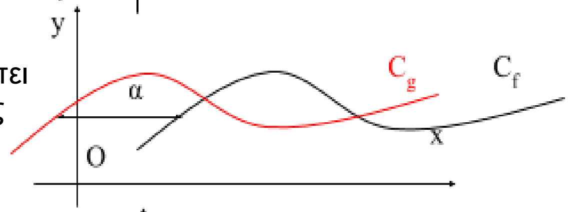
13. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι πάνω **(κάτω)** από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, λύνουμε την ανίσωση f(x)>g(x) (**f(x)<g(x)**).

14. Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης που ορίζεται με κλάδους ή που το πεδίο ορισμού της είναι ένωση διαστημάτων $A_f=A_1UA_2U\ldots UA_ν$, βρίσκουμε ξεχωριστά το σύνολο τιμών κάθε κλάδου ή διαστήματος, και παίρνουμε ένωση. $f(A_f)=f(A_1)Uf(A_2)U\ldots Uf(A_ν)$.

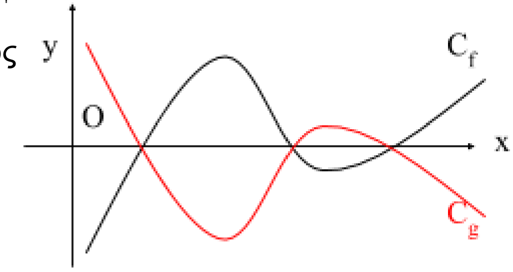
15. Αν g(x)=f(x)+α, α>0, **(g(x)=f(x)-α)** τότε η C_g προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά α μονάδες προς τα πάνω **(κάτω)**.



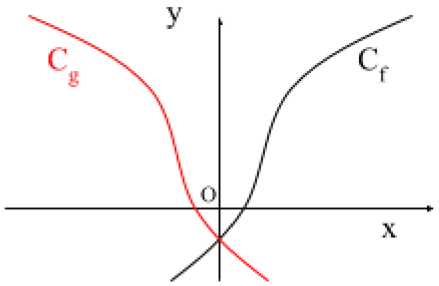
16. Αν g(x)=f(x+α), α>0, **(g(x)=f(x-α))** τότε η C_g προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά α μονάδες προς τα αριστερά **(δεξιά)**.



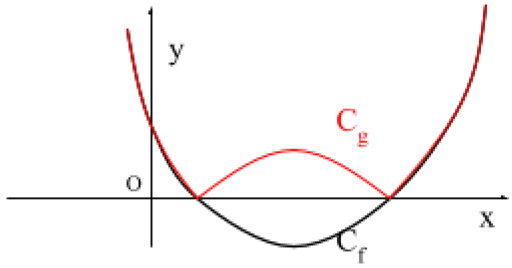
17. Αν g(x) = -f(x), τότε η C_g είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα x΄Ox.



18. Αν g(x)=f(-x), τότε η C_g είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα y΄Oy.



19. Αν g(x)=|f(x)|, τότε η C_g ταυτίζεται με την C_f στα σημεία της C_f με μη αρνητική τεταγμένη και ταυτίζεται με την C_{-f} στα σημεία της C_f με αρνητική τεταγμένη.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε με μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

i. $\{x \in R / |2x-1| < 3\}$.
ii. $\{x \in R / \frac{x+3}{2x} < 1\}$.
iii. $\{x \in R / -x^2+6x-8 \geq 0 < 3\}$.
iv. $\{x \in R / \frac{x+2}{x-3} < 2\}$.
v. $\{x \in R / (x^2-4x+4)(x-1) \geq 0\}$.
vi. $\{x \in R / x^3-3x+2 \geq 0\}$.
vii. $\{x \in R / x^2 \geq 4\}$.
viii. $\{x \in R / \frac{1}{x^2} \geq 3\}$.
ix. $\{x \in R / |x-2| \geq 3\}$.
x. $\{x \in R / (x^2+x+1)(x-2) \leq 0\}$.

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

2.

i. $f(x) = \frac{x-1}{-x^2+3x-2}$

ii. $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$

iii. $f(x) = \sqrt[3]{3-|x-1|}$

iv. $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

v. $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

vi. $f(x) = \ln(x^2-7x+10)$

vii. $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-4x}}$

viii. $f(x) = \frac{2}{\eta\mu x - 1}$

ix. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

x. $f(x) = \sqrt{5-\sqrt{x-6}}$

xi. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

xii. $f(x) = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\sqrt{x}}$

xiii. $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

xiv. $f(x) = x - \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$

xv. $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

xvi. $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$

xvii. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

xviii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$

xix. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$.

xx. $f(x) = \sqrt{e^{x+1}-e^2}$.

xxi. $f(x) = \sqrt{e^{2x}-3e^x+2}$

xxii. $f(x) = \ln(e^x+1)$.

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \leq 1 \\ x^2-x, & x > 1 \end{cases}$.

ii. $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq -2 \\ 3x-7, & -2 < x \leq 1 \end{cases}$.

iii. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x\le 0 \\ \frac{5x}{\sqrt{x+3}}, & 0<x\le 1 \end{cases}$.

iv. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x=\text{ρητός} \\ 1, & \text{αν } x=\text{άρρητος} \end{cases}$.

v. $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x-3}, & \text{αν } x\neq 3 \\ 4, & \text{αν } x=3 \end{cases}$.

vi. $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{αν } x<1 \\ 5, & \text{αν } x=1 \\ -2x+3, & \text{αν } x>1 \end{cases}$.

4. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις συναρτήσεις:

i. $f(x)=|3-2x|$.

ii. $f(x)=2|x-1|+3$.

iii. $f(x)=\frac{2x-4}{|x-2|}$.

iv. $f(x)=\frac{|x-1|+|x+1|}{2}$.

v. $f(x)=5x-|x+4|+2|x-1|$.

vi. $f(x)=|x^2-5x+6|$.

vii. $f(x)=\frac{|x^2+1|-x^2}{x-2}$.

viii. $f(x)=\frac{|1-\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

ix. $f(x)=\frac{|x^2-3x|+x-3}{x^2-9}$.

5. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες:

i. $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-4}$

ii. $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}$

iii. $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

iv. $f(x)=x+\frac{2}{x}$

v. $f(x)=1-\eta\mu x$

vi. $f(x)=\frac{4}{x-1}$

vii. $f(x)=\frac{2\eta\mu x-1}{x^2+1}$

viii. $f(x)=\sqrt{x-6}$

ix. $f(x)=\ln(x^2-6x+9)$

x. $f(x)=\sqrt{2}+2\sigma\upsilon\nu x$

6. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $f(x)=-x^2+6x-8$ και $g(x)=\frac{4-x}{x}$

ii. $f(x)=(x-1)^2$ και $g(x)=\frac{2}{x}$

iii. $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$

iv. $f(x)=3^{x^2-5x+6}$ και $g(x)=1$

v. $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=2$

vi. $f(x)=\ln(x+2)$ και $g(x)=0$

vii. $f(x)=8x^4-28x^3-6$ και $g(x)=-22x^2-7x$

viii. $f(x)=\sqrt{3x+4}$ και $g(x)=7-\sqrt{x+5}$.

7. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι

α) πάνω από τον άξονα των x΄Ox,

β) κάτω από τον άξονα των x΄Ox,

στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x)=-3x^2+10x-3$.

ii. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$.

iii. $f(x)=e^{x^2-3x+2}-1$.

iv. $f(x)=\ln(x+3)$

v. $f(x)=\ln x+3$

vi. $f(x)=2^x-10$.

vii. $f(x)=\log(x^2+2x-1)$

viii. $f(x)=|\ln x|-2$

ix. $f(x)=2+\eta\mu x$

8. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:

α) πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g,

β) κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g,

στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x)=x^2$ και $g(x)=5x-6$.
ii. $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=5$.
iii. $f(x)=ημx$ και $g(x)=1/2$, $x\in[0,π]$.
iv. $f(x)=x^3-1$ και $g(x)=-x^2+x$.
v. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1$.
vi. $f(x)=συνx$ και $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in[-π,π]$.
vii. $f(x)=x^3-x^2$ και $g(x)=4x-4$.
viii. $f(x)=αx^2$, α=σταθερός πραγματικός με $α>4$ και $g(x)=4x-1$.
ix. $f(x)=ημx$ και $g(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in[π,2π]$.
x. $f(x)=συνx$ και $g(x)=-\frac{1}{2}$, $x\in[π/2,3π/2]$.

9. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων και μετά, από αυτές να βρείτε το πεδίο τιμών τους:
i. $f(x)=3x-2$,
ii. $f(x)=4x-3$, με $A=[2,3]$
iii. $f(x)=4-2x$, με $A=(-1,2]$
iv. $f(x)=e^x$, με $x\in(0,4]$
v. $f(x)=3x-1$, με $x\geq 2$
vi. $f(x)=5-2x$, με $x<7$.

vii. $f(x)=\frac{|x-3|}{3-x}-2x$
viii. $f(x)=|x^2-5x+6|$.
ix. $f(x)=\begin{cases}-x+4, & αν\ x\leq 2\\ 3x-1, & αν\ x>2\end{cases}$.
x. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{χ-3}, & αν\ x\neq 3\\ 4, & αν\ x=3\end{cases}$.
xi. $f(x)=|x+3|-3|x-2|$.
xii. $f(x)=\frac{1}{|x|}$

xiii. $f(x)=|x|+|x-3|$.
xiv. $f(x)=\begin{cases}-x^2, & αν\ 1\leq x<2\\ 2x-3, & αν\ -\frac{1}{2}\leq x<1\end{cases}$.
xv. $f(x)=\begin{cases}x-1, & αν\ x\geq 1\\ x^2, & αν\ -1\leq x<1\\ -x+2, & αν\ x<-1\end{cases}$.

10. Έστω f: R→R, τέτοια ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(0)=0$ **β)** η f είναι περιττή

11. Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση f: R→R, τέτοια ώστε $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, για κάθε $x, y\in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(0)=1$ **β)** η f είναι άρτια.

xi. $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$.
xii. $f(x)=x^2$ και $g(x)=|x|+6$.
xiii. $f(x)=\frac{4}{x^2}$ και $g(x)=-x^4+4x^2+1$.
xiv. $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x$.
xv. $f(x)=-\frac{1}{x}$ και $g(x)=x$.
xvi. $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{-x}$.
xvii. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
xviii. $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ και $g(x)=-\ln(2x-1)$.

12. Να βρείτε συνάρτηση f, τέτοια ώστε , $f(x)+2f(1/x)=x$, για κάθε $x\in R^*$.

13. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, αλλά έχουν ίδιο τύπο, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του R, στο οποίο είναι $f(x)=g(x)$:
i. $f(x)=\frac{x^2+2|x|}{x^2-4}$ και $g(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$
ii. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ και $g(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$.
iii. $f(x)=\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ και $g(x)=-\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.
iv. $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ και $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

14. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f+g, fg και f/g, όταν:
i. $f(x)=\frac{-3x+2}{x-4}$ και $g(x)=\frac{x^2+3}{x-5}$.
ii. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x}$
iii. $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{-x}$
iv. $f(x)=\begin{cases}x-1, & αν\ x\leq 2\\ 3x+2, & αν\ x>2\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}2x-3, & αν\ x\leq -1\\ 4-7x, & αν\ x>-1\end{cases}$
v. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3-1}$ και $g(x)=\frac{x^2+x+1}{1-x}$
vi. $f(x)=\frac{1}{|x+2|-1}$ και $g(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}$.

vii. $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)=\sqrt{x^2+x}$

viii. f(x)=$\dfrac{1}{x^2-4}$ και g(x)= $\dfrac{x+2}{x-2}$.

ix. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-4}$.

15. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 100 μονάδες. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου, δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=50x-x^2$, όπου x η μια εκ των δυο διαστάσεων του ορθογωνίου, με 0<x<50.

16. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 25 τετραγωνικές μονάδες. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του ορθογωνίου, δίνεται από την συνάρτηση Π(x)=$\frac{2x^2+50}{x}$, x>0, όπου x η μια εκ των δυο διαστάσεων του ορθογωνίου.

17. Ένα σύρμα μήκους 20cm, κόβεται σε δυο κομμάτια. Με το πρώτο κομμάτι μήκους xcm, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο κομμάτι, κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δυο κατασκευών, δίνεται από τη συνάρτηση E(x)=$\frac{9x^2+4(20-x)^2\sqrt{3}}{144}$, 0<x<20.

18. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς 4cm, παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ=ΔΘ=xcm. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του σχήματος ΕΖΗΘ, δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=2x^2-8x+16$, 0<x<4.

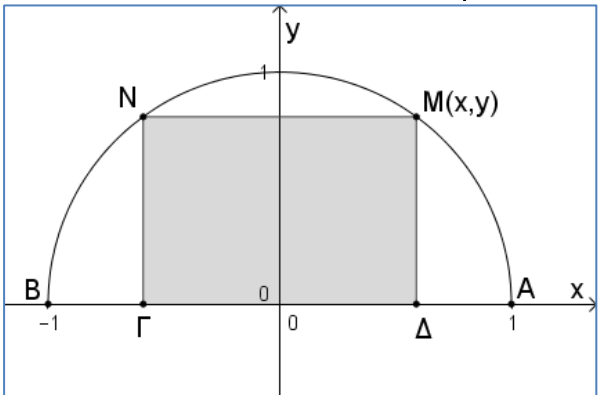
19. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=4, εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Εάν η μια από τις δυο διαστάσεις του ορθογωνίου είναι x, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται σε συνάρτηση με το x, από τη σχέση E(x)=x$\sqrt{64-x^2}$, 0<x<8.

20. Ένα σύρμα μήκους 40m, κόβεται σε δυο κομμάτια. Με το πρώτο κομμάτι κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς xm και με το δεύτερο κομμάτι κατασκευάζουμε κύκλο.

i. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα R του κύκλου, δίνεται από τη συνάρτηση R(x) = $\frac{2(10-x)}{\pi}$, 0<x<10.

ii. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών του τετραγώνου και του κύκλου, δίνεται από τη συνάρτηση E(x) = $\frac{(\pi+4)x^2-80x+400}{\pi}$, 0<x<10.

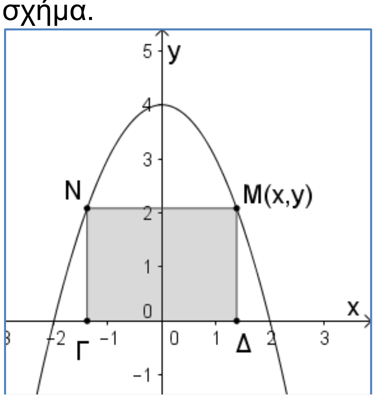
21. Σε ημικύκλιο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 1, που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, εγγράφουμε ορθογώνιο ΜΝΓΔ, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε και η περίμετρος Π του ορθογωνίου ΜΝΓΔ δίνονται από τις σχέσεις E(y)=2y$\sqrt{1-y^2}$, και Π(y)=2y+4$\sqrt{1-y^2}$, όπου y η τεταγμένη του τυχαίου σημείου Μ του ημικυκλίου, με 0<y<1.



22. Έστω Μ(x,y), x>1, σημείο που κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=lnx, x>0. Εάν Ν η προβολή του Μ στον άξονα x΄x και Α(0,α) τυχαίο σημείο του άξονα y΄y, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΝ δίνεται από την συνάρτηση E(x) = $\frac{1}{2}$ xlnx, x>1.

23. Το κόστος για την παραγωγή x μονάδων μιας βιομηχανικής παραγωγής, δίνεται από τη συνάρτηση K(x)=60x-1500, με x≥25 και τα έσοδα από την πώληση των x μονάδων, δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=x^2-20x$. Να εκφράσετε το κέρδος ως συνάρτηση του x και να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in N$, η βιομηχανία κερδίζει.

24. Σημείο Μ(x,y), 0<x<2, κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)= $=4-x^2$. Εγγράφουμε σε αυτή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΜΝΓΔ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να δείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, δίνεται από τη συνάρτηση:
$E(x)=8x-2x^3$, 0<x<2.

25. Κύλινδρος έχει άθροισμα ύψους και διαμέτρου 20cm. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του, δίνεται από τη συνάρτηση $V(\rho)=20\pi\rho^2-2\pi\rho^3$, όπου ρ η ακτίνα της βάσης, με 0<ρ<10cm.

26. Κύλινδρος έχει όγκο 1Lit (=1000cm^3). Να αποδείξετε ότι η ολική του επιφάνεια, δίνεται από τη συνάρτηση $E_{ολ}(\rho)$ = $\frac{2\pi\rho^3+2000}{\rho}$ cm^2, όπου ρ η ακτίνα της βάσης του.

27. END.