

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ  
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

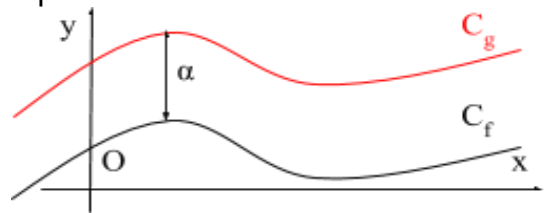
1. Μια συνάρτηση είναι πλήρως ορισμένη, αν δίνεται ο τύπος της αντιστοίχισης και το πεδίο ορισμού της. Πχ αν  $f(x)=3x^2-3, x \in [3,5)$ , το πεδίο ορισμού της είναι το  $A_f=[3,5)$ , Αν  $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \leq 1 \\ x^2-x, & x > 3 \end{cases}$ , το πεδίο ορισμού της είναι το  $A_f=(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ , κλπ. Όταν δεν

δίνεται το πεδίο ορισμού, τότε ως πεδίο ορισμού θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , στο οποίο έχει νόημα ο τύπος της. Μερικές βασικές περιπτώσεις είναι:

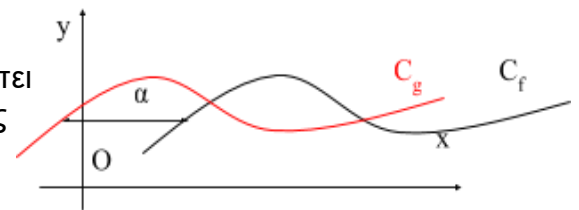
(Στα παρακάτω  $P(x), Q(x)$  είναι πολυώνυμα του  $x$ ).

- a. **Πολυωνυμική συνάρτηση**  $f(x)=P(x)$ . Τότε  $A_f=\mathbb{R}$ .
  - b. **Ρητή συνάρτηση**  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$ .
  - c. **Άρρητη συνάρτηση**  $f(x) = \sqrt{P(x)}$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$ .
  - d. **Λογαριθμική συνάρτηση**  $f(x) = \log_{P(x)} Q(x)$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / 1 \neq P(x) > 0 \text{ και } Q(x) > 0\}$ .
  - e. **Εκθετική συνάρτηση**  $f(x) = P(x)^{Q(x)}$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / 1 \neq P(x) > 0 \text{ ή } (P(x) < 0 \text{ και } Q(x) \in \mathbb{Z} \text{ ή } (P(x)=0 \text{ και } Q(x) > 0)\}$ .
  - f.  $f(x)=\eta\mu P(x)$  και  $g(x)=\sigma\upsilon\nu P(x)$ . Τότε  $A_f=\mathbb{R}$ .
  - g.  $f(x)=\epsilon\varphi P(x)$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / P(x) \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ .
  - h.  $f(x)=\sigma\varphi P(x)$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / P(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
  - i. συνδυασμοί των παραπάνω.
2. Η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  τέμνει τον άξονα των  $y'$ Ο $y$ , μόνο όταν  $0 \in A_f$ . Το σημείο τομής είναι το  $A(0, f(0))$ . Η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  τέμνει τον άξονα των  $x'$ Ο $x$  στα σημεία που οι τετμημένες τους είναι λύση της εξίσωσης  $f(x)=0$ .
3. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  – αν υπάρχουν – έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x)=g(x)$ . Για να βρούμε την τεταγμένη ενός τέτοιου σημείου, βάζουμε την τετμημένη του στον τύπο της  $f$  ή της  $g$  (το ίδιο είναι).
4. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  είναι πάνω (κάτω) από τον άξονα των  $x'$ Ο $x$ , λύνουμε την ανίσωση  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).
5. Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης που ορίζεται με κλάδους ή που το πεδίο ορισμού της είναι ένωση διαστημάτων  $A_f=A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , βρίσκουμε ξεχωριστά το σύνολο τιμών κάθε κλάδου ή διαστήματος, και παίρνουμε ένωση.  $f(A_f) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots \cup f(A_n)$ .

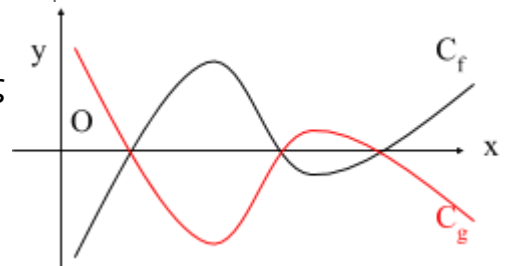
6. Αν  $g(x)=f(x)+\alpha, \alpha > 0$ , ( $g(x)=f(x)-\alpha$ ) τότε η  $C_g$  προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της  $C_f$  κατά  $\alpha$  μονάδες προς τα πάνω (κάτω).



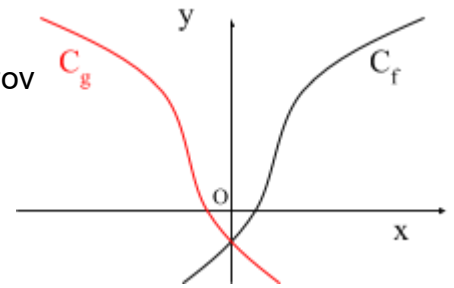
7. Αν  $g(x)=f(x+\alpha), \alpha > 0$ , ( $g(x)=f(x-\alpha)$ ) τότε η  $C_g$  προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της  $C_f$  κατά  $\alpha$  μονάδες προς τα αριστερά (δεξιά).



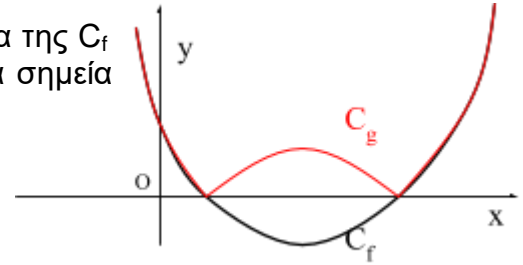
8. Αν  $g(x) = -f(x)$ , τότε η  $C_g$  είναι συμμετρική της  $C_f$  ως προς τον άξονα  $x'$ Ο $x$ .



9. Αν  $g(x)=f(-x)$ , τότε η  $C_g$  είναι συμμετρική της  $C_f$  ως προς τον άξονα  $y'Oy$ .



10. Αν  $g(x)=|f(x)|$ , τότε η  $C_g$  ταυτίζεται με την  $C_f$  στα σημεία της  $C_f$  με μη αρνητική τεταγμένη και ταυτίζεται με την  $C_{-f}$  στα σημεία της  $C_f$  με αρνητική τεταγμένη.



### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε με μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

i.  $\{x \in \mathbb{R} / |2x-1| < 3\}$ .

ii.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+3}{2x} < 1\}$ .

iii.  $\{x \in \mathbb{R} / -x^2+6x-8 \geq 0\}$ .

iv.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+2}{x-3} < 2\}$ .

v.  $\{x \in \mathbb{R} / (x^2-4x+4)(x-1) \geq 0\}$ .

vi.  $\{x \in \mathbb{R} / x^3-3x+2 \geq 0\}$ .

vii.  $\{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 4\}$ .

viii.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x^2} \geq 3\}$ .

ix.  $\{x \in \mathbb{R} / |x-2| \geq 3\}$ .

x.  $\{x \in \mathbb{R} / (x^2+x+1)(x-2) \leq 0\}$ .

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \frac{x-1}{-x^2+3x-2}$

ii.  $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$

iii.  $f(x) = \sqrt[3]{3-|x-1|}$

iv.  $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

v.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

vi.  $f(x) = \ln(x^2-7x+10)$

vii.  $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-4x}}$

viii.  $f(x) = \frac{2}{\eta\mu x - 1}$

ix.  $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

x.  $f(x) = \sqrt{5-\sqrt{x-6}}$

xi.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

xii.  $f(x) = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\sqrt{x}}$

xiii.  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

xiv.  $f(x) = x - \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$

xv.  $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

xvi.  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

xvii.  $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

xviii.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$

xix.  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

xx.  $f(x) = \sqrt{e^{x+1} - e^2}$

xxi.  $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$

xxii.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \leq 1 \\ x^2-x, & x > 1 \end{cases}$

ii.  $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq -2 \\ 3x-7, & -2 < x \leq 1 \end{cases}$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{5x}{\sqrt{x+3}}, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{v. } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = \text{ρητός} \\ 1, & \text{αν } x = \text{άρρητος} \end{cases} \quad \text{vi. } f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 1 \\ 5, & \text{αν } x = 1 \\ -2x+3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

4. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις συναρτήσεις:

i.  $f(x) = |3-2x|$ .

ii.  $f(x) = 2|x-1|+3$ .

iii.  $f(x) = \frac{2x-4}{|x-2|}$ .

iv.  $f(x) = \frac{|x-1|+|x+1|}{2}$ .

v.  $f(x) = 5x - |x+4| + 2|x-1|$ .

vi.  $f(x) = |x^2-5x+6|$ .

vii.  $f(x) = \frac{|x^2+1|-x^2}{x-2}$ .

viii.  $f(x) = \frac{|1-\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ .

ix.  $f(x) = \frac{|x^2-3x|+x-3}{x^2-9}$ .

5. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες:

i.  $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-4}$

ii.  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$

iii.  $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

iv.  $f(x) = x + \frac{2}{x}$

v.  $f(x) = 1 - \eta\mu x$

vi.  $f(x) = \frac{4}{x-1}$

vii.  $f(x) = \frac{2\eta\mu x - 1}{x^2 + 1}$

viii.  $f(x) = \sqrt{x-6}$

ix.  $f(x) = \ln(x^2-6x+9)$

x.  $f(x) = \sqrt{2} + 2\sigma\upsilon\nu x$

6. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = -x^2+6x-8$  και  $g(x) = \frac{4-x}{x}$

ii.  $f(x) = (x-1)^2$  και  $g(x) = \frac{2}{x}$

iii.  $f(x) = x^3$  και  $g(x) = x$

iv.  $f(x) = 3^{x^2-5x+6}$  και  $g(x) = 1$

v.  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = 2$

vi.  $f(x) = \ln(x+2)$  και  $g(x) = 0$

vii.  $f(x) = 8x^4 - 28x^3 - 6$  και  $g(x) = -22x^2 - 7x$

viii.  $f(x) = \sqrt{3x+4}$  και  $g(x) = 7 - \sqrt{x+5}$

7. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  είναι

α) πάνω από τον άξονα των  $x'Ox$ ,

β) κάτω από τον άξονα των  $x'Ox$ ,

στις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $f(x) = -3x^2+10x-3$ .

ii.  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ .

iii.  $f(x) = e^{x^2-3x+2} - 1$ .

iv.  $f(x) = \ln(x+3)$

v.  $f(x) = \ln x + 3$

vi.  $f(x) = 2^x - 10$ .

vii.  $f(x) = \log_{\frac{3}{4}}(x^2 + 2x - 1)$

viii.  $f(x) = |\ln x| - 2$

ix.  $f(x) = 2 + \eta\mu x$

**8.** Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων και μετά, από αυτές να βρείτε το πεδίο τιμών τους:

- i.  $f(x)=3x-2$ ,
- ii.  $f(x)=4x-3$ , με  $A=[2,3]$
- iii.  $f(x)=4-2x$ , με  $A=(-1,2]$
- iv.  $f(x)=e^x$ , με  $x \in (0,4]$
- v.  $f(x)=3x-1$ , με  $x \geq 2$
- vi.  $f(x)=5-2x$ , με  $x < 7$ .



vii.  $f(x) = \frac{|x-3|}{3-x} - 2x$

viii.  $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ .

ix.  $f(x) = \begin{cases} -x+4, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ .

x.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$ .

xi.  $f(x) = |x+3| - 3|x-2|$ .

xii.  $f(x) = \frac{1}{|x|}$

xiii.  $f(x) = |x| + |x-3|$ .

xiv.  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ 2x-3, & \text{αν } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$ .

xv.  $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2, & \text{αν } -1 \leq x < 1 \\ -x+2, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$ .



**9.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε  $f(x+y)=f(x)+f(y)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι:

**α)**  $f(0)=0$

**β)** η  $f$  είναι περιττή

**10.** Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε  $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι: **α)**  $f(0)=1$

**β)** η  $f$  είναι άρτια.

**11.** Να βρείτε συνάρτηση  $f$ , τέτοια ώστε  $f(x) + 2f(1/x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**12.** Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, αλλά έχουν ίδιο τύπο, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , στο οποίο είναι  $f(x)=g(x)$ :

i.  $f(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 4}$  και  $g(x) = \frac{|x|}{|x| - 2}$

ii.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$  και  $g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ .

iii.  $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$  και  $g(x) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ .

iv.  $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$  και  $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$

**13.** Να βρεθούν οι συναρτήσεις  $f+g$ ,  $fg$  και  $f/g$ , όταν:

i.  $f(x) = \frac{-3x+2}{x-4}$  και  $g(x) = \frac{x^2+3}{x-5}$ .

ii.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  και  $g(x) = \sqrt{x}$

iii.  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = e^{-x}$

iv.  $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x+2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$  και

$g(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{αν } x \leq -1 \\ 4-7x, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$

v.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$  και  $g(x) = \frac{x^2+x+1}{1-x}$

vi.  $f(x) = \frac{1}{|x+2| - 1}$  και

$g(x) = -\frac{1}{x^2+3x+2}$ .

vii.  $f(x) = \sqrt{x+1}$  και  $g(x) = \sqrt{x^2+x}$

viii.  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$  και  $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ .

ix.  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  και  $g(x) = \sqrt{x^2-4}$ .