

## ΕΛΛΕΙΨΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΜΑΡΤΙΟΣ 2023

### 20718 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη  $C$  με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

- α) Να βρείτε τις εστίες της. (Μονάδες 8)
- β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη  $C$  σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της  $C$  και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 9)

### 20883 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης  $C$ :  $16x^2 + 25y^2 = 400$ .

- α) Να βρείτε τα μήκη  $BB'$ ,  $AA'$  του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της  $E$  και  $E'$ . (Μονάδες 12)
- β) Αν  $E'(-3,0)$  και  $E(3,0)$ , να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο  $E'$  και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το  $E$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ . (Μονάδες 13)

### 21308 ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των εστιών  $E$  και  $E'$  της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 09)
- β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 08)
- γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της έλλειψης στο σημείο της  $B(0,4)$ . (Μονάδες 08)

### 21647 ΘΕΜΑ 2

Η έλλειψη  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(4,0)$ ,  $E'(-4,0)$  και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της  $C$ . (Μονάδες 10)
- β) την εκκεντρότητά της  $C$ . (Μονάδες 7)
- γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C$  στο σημείο της  $M(4, \frac{9}{5})$ . (Μονάδες 8)

### 21648 ΘΕΜΑ 2

Η έλλειψη  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(3,0)$ ,  $E'(-3,0)$  και διέρχεται από το σημείο  $M(4, \frac{12}{5})$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της  $C$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C$  στο σημείο της  $M(4, \frac{12}{5})$ . (Μονάδες 7)

Δίνεται ότι  $\sqrt{1369} = 37$

### 22168 ΘΕΜΑ 2

Δίνονται η παραβολή  $y^2 = 2px$  και η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

- α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$ , να βρείτε:
- i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

ii. Την εστία E της παραβολής.

(Μονάδες 05)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O, αν η μια εστία της είναι το σημείο E(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4. (Μονάδες 10)

**22192 ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση  $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$  (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B(0,9) είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της B(0,9). (Μονάδες 10)

**22268 ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :  
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ..... Οι εστίες της E και E', έχουν συντεταγμένες E(....., .....) και E'(....., .....). Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ..... και η εκκεντρότητα της είναι ίση με .....». (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της B(0,-2). (Μονάδες 10)

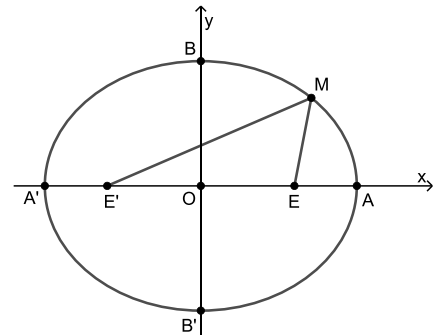
**22556 ΘΕΜΑ 2**

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία A'(-5, 0), A(5, 0), B'(0, -4) και B(0, 4).

α) Να αποδείξετε ότι:

iii. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι (A'A) = 10 και (B'B) = 8. (Μονάδες 10)

iv. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία E'(-3, 0) και E(3, 0). (Μονάδες 10)



β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι (ME') + (ME) = 10. (Μονάδες 5)

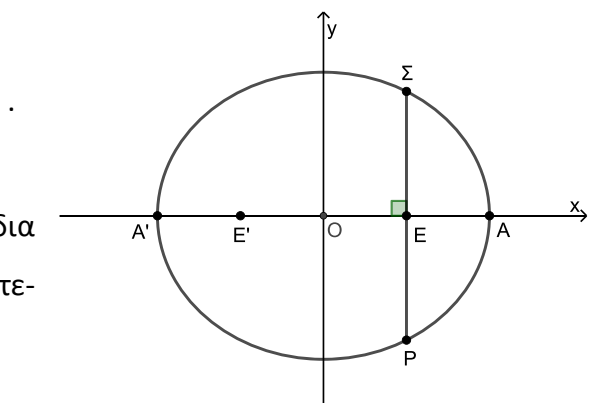
**22558 ΘΕΜΑ 2**

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία E'(-2, 0) και E(2, 0) και μήκος μεγάλου άξονα (A'A) = 8.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ . (Μονάδες 12)

β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία E(2, 0). Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

v. Να αποδείξετε ότι Σ(2, 3) και Ρ(2, -3).



(Μονάδες 8)

vi. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.

(Μονάδες 5)

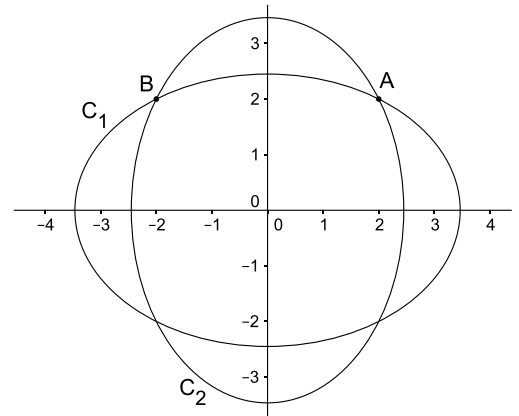
## 22564 ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ελλείψεις  $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$  και  $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A(2,2)$  και  $B(-2,2)$  ανήκουν και στις δύο ελλείψεις. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon_1$  της έλλειψης  $C_1$  στο σημείο  $A$  και η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon_2$  της έλλειψης  $C_2$  στο σημείο  $B$  είναι αντίστοιχα  $x + 2y - 6 = 0$  και  $-2x + y - 6 = 0$ . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι κάθετες.



(Μονάδες 5)

## 22273 ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

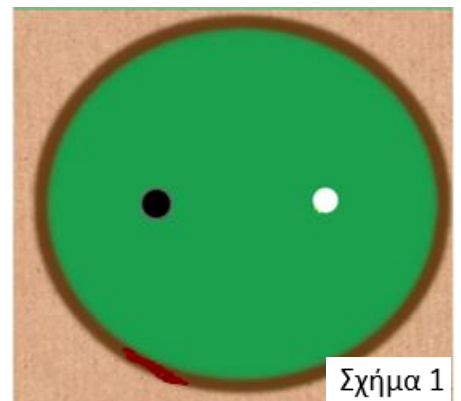
- Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .
- Των εστιών  $E$  και  $E'$  της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο  $A(0, 4)$  και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

## 20726 ΘΕΜΑ 4

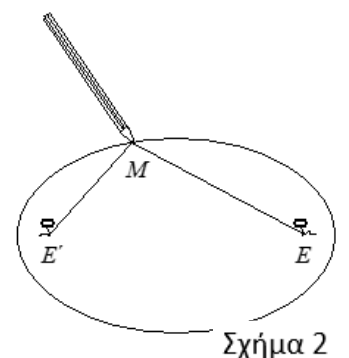
Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία  $E(3,0)$  και  $E'(-3,0)$ . Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο  $E'$ . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία  $E$  και  $E'$  δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη  $C$  όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).



α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης  $C$ . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης  $C$  και να βρείτε την εκκεντρότητά της. (Μονάδες 5)

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο  $E$ . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να



περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης  $C$  πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα

2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα

3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα

4) σε οποιοδήποτε σημείο της  $C$  εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσες αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)