

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x^2$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις:
 - i. $x=-1$ και $x=1$.
 - ii. $x=1$ και $x=2$.
 - iii. $x=-1$ και $x=2$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 6x^2 + 2, & \text{αν } x < 0 \\ 2 - 2x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.
 - i. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.
 - ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες με εξισώσεις
 - α) $y=0, x=0, x=1$
 - β) $y=0, x=-1, x=2$.
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x^2-4x|$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις:
 - i. $x=0$ και $x=3$.
 - ii. $x=0$ και $x=5$.
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2-|3-x|$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0, x=4, y=0$.
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^4-x^2$ και τον άξονα $x'x$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 6x^2, & \text{αν } x \geq -1 \\ -\frac{6}{x}, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=-2$.
7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+3$ και τον άξονα $x'x$.
8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x$ και τον άξονα $x'x$.
9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x^3-5x^2, g(x)=x^3-4x^2$, και των ευθειών με εξισώσεις α) $x=-2, x=1$ β) $x=-1, x=2$.
10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3x^4+x^2$ και $g(x)=2x^4+2x^2$.
11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-2x+\frac{1}{2}$ και την ευθεία $4x-2y+1=0$.
12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=4x$ και $g(x)=x^3$.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Να υπολογίσετε:
 - i. Την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης C_f της f , στο σημείο $A(-2,4)$.
 - ii. Την κυρτότητα της f .
 - iii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την (ϵ) και τον άξονα $x'x$.
14. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\ln x, g(x)=\ln \frac{1}{x}$ και την ευθεία με εξίσωση $y=-1$.
15. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0, x=3$. Να βρείτε ευθεία $x=a$, που να χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα τμήματα.
16. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $y=0, x=0, x=2$. Να βρείτε ευθεία $x=a$, που να χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα τμήματα.

17. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-\ln x$, την εφαπτομένη της στο σημείο της $M\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ και τον άξονα $x'x$.
18. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ω του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{6}{x}$, και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $y=1$ και $y=3$.
- β) Να βρεθεί η τιμή του a , για την οποία η ευθεία $y=a$, χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα χωρία.
19. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x$, και τις ευθείες με εξισώσεις $y=0$, $x=0$, $x=1$. Να βρεθεί η τιμή του a , για την οποία η ευθεία $y=ax$, χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα χωρία.
20. Για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $f(0)=g(0)$, $f'(3)=4+g'(3)$ και $f''(x)=2+g''(x)$ για κάθε $x \in [0,3]$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=3$.
21. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x^2}$, και τις ευθείες με εξισώσεις $y=0$, $x=1$ και $x=\lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$.
- β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
22. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda \neq 1$.
- β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$.
23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.
- Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.
 - Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.
24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.
- Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.
 - Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
 - Να κάνετε την γραφική της παράσταση.
 - Να δείξετε ότι αντιστρέφεται.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και της f^{-1} .
25. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(1)=0$, $f'(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
26. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f^3(x)+2f(x)=3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.
27. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:
- ☛ $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$.
 - ☛ $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
 - ☛ $f'(x) = \frac{1+2x^2}{x} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
- Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .
 - Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{x^2-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- iii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .
- iv. Υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΗΝ Ε.Μ.Ε.

28. (Προτεινόμενο EME 2016) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(x)=f(x)+g(x)$.
 - Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα, δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$, η οποία διχοτομεί την γωνία $1^{\text{ου}} - 3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίων.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία $x=3$.
 - Ένα υλικό σημείο M με θετική τετμημένη, κινείται στην C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec . Αν N είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και $A(0,\alpha)$ σημείο του άξονα $y'y$, με $\alpha > 0$, τότε:
 - Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού E του τριγώνου AMN κάθε στιγμή t ισούται με $\Phi(x(t))$.
 - Να βρείτε την τετμημένη του σημείου M , την χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN είναι ίσος με $\left(2 \ln 3 + \frac{8}{9}\right) \text{cm}^2 / \text{sec}$.
29. (Προτεινόμενο EME 2016)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x - 1 = 0$, με $x > 1$, έχει ακριβώς μια λύση.
 - Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:
 - $f(x) = x \ln x (f(x) - f'(x))$, για κάθε $x > 1$.
 - $f(e) = e^e$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Αν $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x > 1$
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Εάν $E(a)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = f(x) + x \ln x \cdot f'(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2$ και $x=a$ με $a > 2$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(E(a) \cdot \eta\mu \frac{1}{E(a)} \right)$.
30. (Προτεινόμενο EME 2016) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 2e)$. Αν η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0+1, 2e^{x_0})$:
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{2-x}$.
 - Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a-2x)}{x-a} + \frac{f(2x)}{x-\beta} = 2017$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $y = e^2 + 1$.
 - Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$.
31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}(x^3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - Να δείξετε ότι, αν x_1 και x_2 οι θέσεις τοπικών ακροτάτων, τότε τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και το σημείο καμπής είναι συνευθειακά.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

- v. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f της f και τον άξονα $x'x$.

32. (Θέμα 2^ο 2001) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2, & \alpha \nu x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & \alpha \nu x > 3 \end{cases}$.

- i. Αν η f είναι συνεχής, να δείξετε ότι $a = -\frac{1}{9}$. Μονάδες 9
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(4, f(4))$. Μονάδες 7
- iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$. Μονάδες 9

33. (Θέμα 4^ο 2002)

- i. Δίνονται οι συναρτήσεις h και g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

Να δείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_a^\beta h(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$. Μονάδες 2

- ii. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

a) Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f . Μονάδες 5

b) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$. Μονάδες 12

c) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$. Μονάδες 6

34. (Θέμα 3^ο 2003) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Μονάδες 6
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 6
- iii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} . Μονάδες 5
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=3$. Μονάδες 6

35. (Θέμα 3^ο 2005) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 3
- ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από το $O(0,0)$ έχει εξίσωση $y = \lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M . Μονάδες 7
- iii. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη της στο σημείο M , είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$. Μονάδες 8

iv. Υπολογίστε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$. Μονάδες 7

36. (Θέμα 2^ο 2006) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$, με $x \geq 2$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1». Μονάδες 6
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} . Μονάδες 8
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$. Μονάδες 4
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} . Μονάδες 7

37. (Θέμα Γ 2012) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = (x-1) \ln x - 1$, $x > 0$.

- Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$, έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες. Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 οι δυο ρίζες της εξίσωσης του Γ2 ερωτήματος, με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$. Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$, $x > 0$, τον άξονα x' και την ευθεία $x = e$. Μονάδες 7

38. (Θέμα Γ 2014) Δίνεται συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

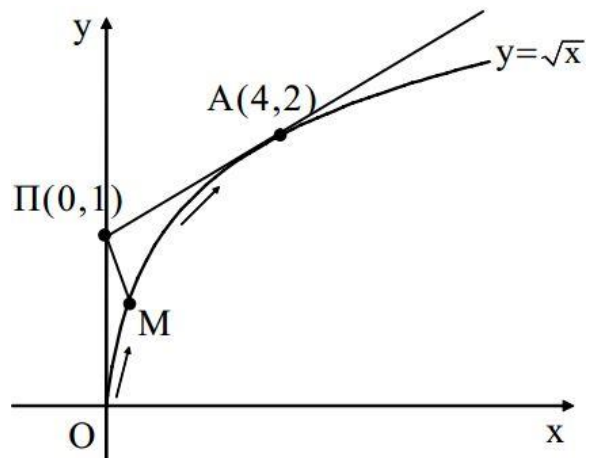
Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$. Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$ και την πλάγια ασύμπτωτη της στο $-\infty$. Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, τον άξονα x' και την ευθεία $x = 1$. Μονάδες 7

39. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$.



i. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t) = 16t$. Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. Μονάδες 6

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα PM του παρατηρητή από το σημείο O μέχρι το σημείο A . Μονάδες 6

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, 1/4)$, κατά την οποία η απόσταση $d = (PM)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

40. END