***40.* 23218-4:** Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2, με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x = x_1$, $x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x = x_2, x = -1$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Η συνάρτηση P(x) είναι παραγωγίσιμη στο IR ως πολυωνυμική με $P'(x)=3x^2+6x-\lambda$. Η συνάρτηση $P'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο IR ως πολυωνυμική με $P''(x)=6x+6$. Το πρόσημο της $P''(x)$ φαίνεται παρακάτω.

x	-∞	-1	+∞
P´´(x)	-	0	+
P(x)	∩		∪

Παρατηρούμε ότι η P(x) είναι κοίλη στο (-∞,-1] και κυρτή στο [-1,+∞) και έχει εφαπτομένη στο σημείο (-1, P(-1)) δεδομένου ότι είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, οπότε παρουσιάζει καμπή στο -1 για κάθε λ ∈ IR. Το σημείο καμπής είναι το K(-1, P(-1)) , δηλαδή το κ(-1, λ+3) .

β) Η P´(x) είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=36+12λ και α=3 > 0.

- Αν 36+12λ < 0 ⇔ λ < -3, είναι P´(x) > 0 για κάθε x ∈ IR και η συνάρτηση P(x) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο IR και δεν έχει ακρότατα.
- Αν 36+12λ = 0 ⇔ λ = -3, είναι P´(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ IR, με το ίσον να ισχύει μόνο στην περίπτωση που το x παίρνει την τιμή x = $-\frac{\beta}{2\alpha} = -1$ και η συνάρτηση P(x) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο IR και δεν έχει ακρότατα.
- Αν 36+12λ > 0 ⇔ λ > -3, τότε η P´(x) έχει δυο ρίζες άνισες x_1 και x_2 (έστω $x_1 < x_2$) και το πρόσημο της P´(x) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞	x_1		x_2	+∞
P´(x)	+	0	-	0	+
P(x)	↗		↘		↗
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Συνεπώς η P(x) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

γ)

i. Αφού η P(x) παρουσιάζει τοπικά ακρότατα έχουμε από προηγούμενο ερώτημα ότι λ > -3. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): y-P(-1)=P´(-1)(x+1) ⇔ **…** ⇔ y = -(3+λ)x, η οποία είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει αρνητική κλίση αφού λ > -3 ⇔ λ+3 > 0 και επομένως βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Η (ε) διέρχεται από το σημείο καμπής Κ και αφού η P(x) είναι κοίλη στο (-∞, -1] και κυρτή στο [-1, +∞) , βρίσκεται πάνω από τη C_P στο (-∞, -1] και κάτω από τη C_P στο [-1, +∞). Συνεπώς $E_1 = \int_{x_1}^{-1}(-(3+\lambda)x - (x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1))dx$

$= \int_{x_1}^{-1}(-3x - \cancel{\lambda x} - x^3 - 3x^2 + \cancel{\lambda x} - 1))dx$

$= \int_{x_1}^{-1}(-x^3 - 3x^2 - 3x - 1))dx$
$= \int_{-1}^{x_1}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1))dx$
$= \int_{-1}^{x_1}(x + 1)^3 dx$
$= \left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_{-1}^{x_1}$
$= \frac{(x_1+1)^4}{4}$.

και $E_2 = \int_{-1}^{x_2}\left((x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1) + (3 + \lambda)x\right)dx$
$= \int_{-1}^{x_2}(x^3 + 3x^2 - \cancel{\lambda x} + 1 + 3x + \cancel{\lambda x}))dx$
$= \int_{-1}^{x_2}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx$
$= \int_{-1}^{x_2}(x + 1)^3 dx$
$= \left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_{-1}^{x_2}$
$= \frac{(x_2+1)^4}{4}$.

Οι x_1 και x_2 είναι ρίζες της P΄(x) οπότε από τους τύπους Vieta θα είναι:

$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{6}{3} = -2$……………………………………….(1)

$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \frac{(x_1+1)^4}{4} = \frac{(x_2+1)^4}{4}$
$\Leftrightarrow (x_1+1)^4 = (x_2+1)^4$
$\Leftrightarrow |x_1+1| = |x_2+1|$
$\Leftrightarrow x_1+1 = x_2+1$ ή $x_1+1 = -x_2-1$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ (απορρίπτεται γιατί $x_1 < x_2$) ή $x_1+x_2 = -2$
$\Leftrightarrow x_1+x_2 = -2$
που ισχύει λόγω της (1).

41. 24275-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$, $x \in$ IR.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία y=-x+1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \rho$ ισούται με:

$E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho - 1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

Λύση:

α) Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (-x + 1)) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(-x + 1 + \frac{1}{e^x}\right) - (-x + 1)\right]$
$= \lim_{x\to+\infty}\left(-x + 1 + \frac{1}{e^x} + x - 1\right)$
$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)$

έπεται ότι η ευθεία y=-x+1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞.

β) Είναι, $f'(x) = \left(-x + 1 + \frac{1}{e^x}\right)' = (-x+1+e^{-x})'$
$= -1+e^{-x}(-x)'$
$= -1-e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in$ IR.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για τη συνάρτηση f , έχουμε ότι είναι συνεχής στο [1,2] ως άθροισμα των συνεχών y = -x + 1 (πολυωνυμική) και της $y = e^{-x}$ (εκθετική).

Επίσης f(1)=1/e>0 και f(2)=-1+$\frac{1}{e^2}$ <0, άρα f(1)· f(2) < 0.
Επομένως, η συνάρτηση f πληροί τις προϋποθέσεις του <u>θεωρήματος Bolzano</u> στο διάστημα [1,2], άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον ρ ∈ (1,2) ώστε f(ρ)=0.
Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έπεται ότι ο αριθμός ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.
Ακόμη είναι ρ ∈ (1,2) άρα ρ>1.

Εναλλακτικά f((1,+∞)) $\overset{f\downarrow}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right)$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+\frac{1}{e^x}\right), \frac{1}{e}\right)$$
$$= \left(-\infty+1+0,\ \frac{1}{e}\right)$$
$$= \left(-\infty,\ \frac{1}{e}\right).$$

Επειδή 0∈ f((1,+∞)), η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ ∈ (1,+∞), άρα ρ > 1 και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα έπεται ότι ο αριθμός ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.

γ) 1 < x < ρ $\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}$ f(1) > f(x) > f(ρ) = 0
⇔ f(x) > 0.
Επομένως το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου Ω ισούται με:

$$E(\Omega) = \int_1^\rho |f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_1^\rho f(x)dx$$
$$= \int_1^\rho \left(-x+1+\frac{1}{e^x}\right)dx$$
$$= \int_1^\rho (-(x-1)+e^{-x})dx$$
$$= \left[-\frac{(x-1)^2}{2} - e^{-x}\right]_1^\rho$$
$$= -\frac{(\rho-1)^2}{2} - e^{-\rho} + e^{-1} \ldots\ldots(1)$$

f(ρ)=0 ⇔ $-\rho+1+\frac{1}{e^\rho}$ = 0 ⇔ $e^{-\rho}$=ρ-1…….(2)

(1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ E(Ω) = $-\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

42. 24704-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx + e^x$, $x > 0$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$. (Μονάδες 9)
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - lnx_0)$. (Μονάδες 10)

<u>Λύση</u>:
α) Για κάθε α, β∈(0, +∞) με α < β παίρνουμε $e^α < e^β$ και lnα < lnβ καθώς οι συναρτήσεις ex και lnx είναι γνησίως αύξουσες. Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $e^α$ + lnα < $e^β$+ lnβ, άρα f(α) < f(β). Ώστε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).

Εναλλακτικά f΄(x) = $\frac{1}{x} + e^x > 0$ για κάθε x > 0. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).

β) Αφού η εξίσωση f΄(x)=0 είναι αδύνατη, λόγω του Θ. Rolle, η εξίσωση f(x) = 0 έχει το πολύ μία λύση στο (0, +∞).
Καθώς η f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως αύξουσα στο (0, 1), το αντίστοιχο σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $\left(\lim_{x\to0^+} f(x), f(1)\right)$ = (-∞,e) στο οποίο ανήκει ο αριθμός μηδέν, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0∈(0,1) ώστε f(x_0) = 0, το οποίο είναι και μοναδικό λόγω της μονοτονίας.
Ώστε η C_f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα x΄Ox.

γ) Για κάθε x∈(x_0,1) έχουμε x_0 < x < 1 $\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f(x_0) < f(x) < f(1)
⇔ 0 < f (x) < e.

Άρα Ε(Ω) = $\int_{x_0}^{1}|f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_{x_0}^{1} f(x)dx$

$= \int_{x_0}^{1}(lnx + e^x)dx$

$= [xlnx - x + e^x]_{x_0}^{1}$

= -1+e - ($x_0 lnx_0 - x_0 + e^{x_0}$)

= e - e^{x_0}-1- $x_0 lnx_0 + x_0$

= e + lnx_0 – 1 - $x_0 lnx_0 + x_0$

= e + (lnx_0 – 1) - x_0(lnx_0 -1)

= e + (lnx_0 – 1)(1 - x_0)

= e + (1 - lnx_0)(x_0 - 1).

f(x_0)=0 ⇔ $lnx_0 + e^{x_0}$=0
⇔ $e^{x_0} = -lnx_0$

43. 25147-4: Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \cdot ημx, x \in [0,2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$\begin{Bmatrix} y = e^{-x} \\ y = e^{-x}ημx \end{Bmatrix}$ ⇔ $e^{-x} = e^{-x}$ημx ⇔ e^{-x} (1 – ημx) = 0

⇔ 1 - ημx = 0 ……………………γιατί $e^{-x} > 0$

⇔ ημx = 1

⇔ x = 2κπ + $\frac{\pi}{2}$, κ∈ℤ…………………και επειδή x ∈[0,2π], κ=0

$\overset{κ=0}{\Longleftrightarrow}$ x = $\frac{\pi}{2}$.

Για x = $\frac{\pi}{2}$, y = $e^{-\frac{\pi}{2}}$, συνεπώς, μοναδικό κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

β) $g'(x) = (f(x) \cdot ημx)' = f'(x) \cdot ημx + f(x) \cdot (ημx)'$

$= f'(x) \cdot ημx + f(x) \cdot συνx$

οπότε $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{ημ\frac{\pi}{2}}_{1} + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{συν\frac{\pi}{2}}_{0} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Συνεπώς, οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

γ) Ισχύει ότι f(x) – g(x) = $e^{-x}(1 - ημx)$ ≥ 0, οπότε για το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισχύει:

Ε = $\int_0^{\pi/2}|f(x) - g(x)|dx = \int_0^{\pi/2}(f(x) - g(x))dx$

$= \int_0^{\pi/2} e^{-x}(1 - ημx)dx$

$= \int_0^{\pi/2} e^{-x}dx - \int_0^{\pi/2} e^{-x}ημxdx$.

Για τα δύο ολοκληρώματα ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi/2} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{\pi/2} = -e^{-\frac{\pi}{2}} + e^0 = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$.
- $I = \int_0^{\pi/2} e^{-x}ημxdx = \int_0^{\pi/2}(-e^{-x})'ημxdx$

$= \int_{\pi/2}^{0}(e^{-x})'ημxdx$

$\overset{\substack{παραγ. \\ ολοκλ.}}{=} [e^{-x}ημx]_{\pi/2}^{0} - \int_{\pi/2}^{0} e^{-x}(ημx)'dx$

$= -e^{-\frac{\pi}{2}} - \int_{\pi/2}^{0} e^{-x}συνxdx$

$$= -e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_{\pi/2}^{0} (e^{-x})'\sigma\upsilon\nu x dx$$

$$\overset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.}{\underset{o\lambda o\kappa\lambda.}{=}} -e^{-\frac{\pi}{2}} + [e^{-x}\sigma\upsilon\nu x]_{\pi/2}^{0} - \int_{\pi/2}^{0} e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x)'dx$$

$$= -e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_{\pi/2}^{0} e^{-x}\eta\mu x dx$$

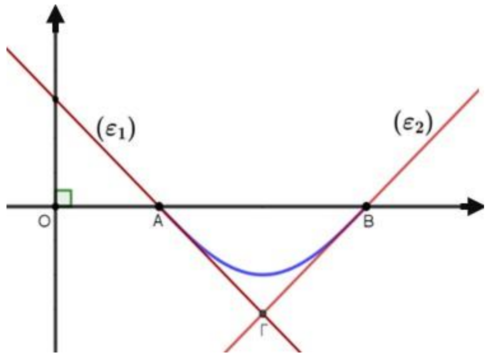
$$= -e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - I.$$

Άρα $I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - I \Leftrightarrow 2I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + 1$

$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$

Τελικά το εμβαδόν είναι ίσο με Ε = $1 - e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

44. 25235-4: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι $(\varepsilon_1)\ y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Έχουμε f '(x) = -ημx, άρα f$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = συν$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = 0 και f '$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = -ημ$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = -1, οπότε η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση (ε_1): y – f$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = f΄$\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi}{2}$.

Ομοίως f$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = συν$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = 0 και f '$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = -ημ$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = 1, οπότε η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση:

(ε_2): y – f$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = =f΄$\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{3\pi}{2}$.

β) f(x) = συνx ≤ 0 στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (2° και 3° τεταρτημόρια), άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα xx΄ και f ΄΄(x) = -συνx ≤ 0, για $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, επομένως είναι κυρτή και η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τις ευθείες ε_1 και ε_2.

Αρχικά, η τετμημένη του σημείου τομής Γ των (ει), (ξ2) θα προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης f(x)=g(x) $\Leftrightarrow -x + \frac{\pi}{2} = x - \frac{3\pi}{2}$

⇔ 2x = 2π

⇔ x = π.

Για x = π η (ε_1) ⇔ y = $-\frac{\pi}{2}$, οπότε Γ$\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Η απόσταση του σημείου Γ από τον άξονα x΄Ox, δηλαδή το μήκος του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Γ, είναι υ = $\left|-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$.

Ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ · (ΑΒ)·υ

= $\frac{1}{2}$ · π · $\frac{\pi}{2}$

= $\frac{1}{4}$ π².

Επίσης $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |f(x)| dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\sigma\upsilon\nu x| dx$

$= -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx$

$= [-\eta\mu x]_{\pi/2}^{3\pi/2}$

$= \eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu\frac{3\pi}{2}$

= 1-(-1)

= 2.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι Ε = (ΑΒΓ) - $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |f(x)|dx$

$= \frac{1}{4}\pi^2 - 2$

$= \frac{\pi^2-8}{4}$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(f(x)+x-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $f(x) \geq -x + \frac{\pi}{2}$,

αφού η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε_1 όταν το x τείνει στο π/2 από δεξιά, θα είναι $f(x) + x - \frac{\pi}{2} \geq 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}} = +\infty$.

μορφή $\frac{1}{0}$

$\boldsymbol{f(x) + x - \frac{\pi}{2} > 0}$

45. 25259-4: Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR → IR, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

1) Να αποδειχθεί ότι:

a. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$. (Μονάδες 6)

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)} = 0$. (Μονάδες 7)

2) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

a. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$. (Μονάδες 6)

b. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$. (Μονάδες 6)

Λύση:

1a) Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου (0,f(0)), επαληθεύουν την εξίσωση της ε. Άρα f(0) = $\frac{1}{4}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης λ = 0, ισούται με την παράγωγο στο $x_0 = 0$, δηλαδή f ΄(0) = 0.

1b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x}$

$= \frac{1}{f(0)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x}$

$= 4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x}$

$= 16\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x)-\frac{1}{4}}{\eta\mu x}$

$= 16\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-\frac{1}{4}}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}$

$= 16\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}}$

f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο IR, επομένως και στο 0.

f ΄ συνεχής στο IR, επομένως και στο 0.

= 16 · $\frac{f'(0)}{1}$ = 0.

2a) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR, οπότε η f ' είναι γνησίως αύξουσα.
Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει: x ≥ 0 ⇔ f '(x) ≥ f '(0)
⇔ f '(x) ≥ 0.
με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 0.

2b) Επειδή η f ' είναι γνησίως αύξουσα, είναι και συνάρτηση «1-1».
f΄(x) = 0 ⇔ f΄(x) = f΄(0) ⇔ x = 0, γιατί η f΄ είναι «1-1»

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με $\int_0^1 |f'(x)|dx \overset{(2a)}{=} \int_0^1 f'(x)dx$
$= [f(x)]_0^1$
= f(1) – f(0)
$= 1 - \frac{1}{4}$
$= \frac{3}{4}$ τετραγωνικές μονάδες.

46. **25746-4:** Έστω συνάρτηση f : IR → IR παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in$ IR και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο IR. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$. (Μονάδες 7)

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$. (Μονάδες 6)

Λύση:

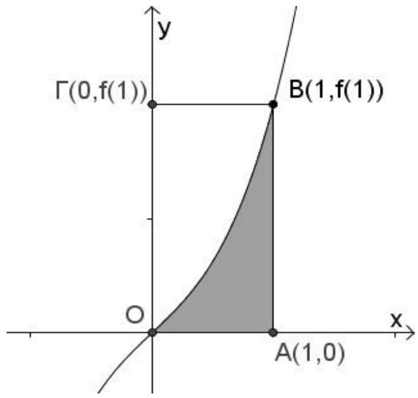
α) Η g(x) = e^{-x}f(x) είναι παραγωγίσιμη στο IR ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο $g'(x) = (e^{-x})'f(x) + e^{-x}f'(x)$
$= e^{-x}(-x)'f(x) + e^{-x}f'(x)$
$= -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)$
$= e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$, για κάθε $x \in$ IR, αφού $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in$ IR.
Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

β) Για κάθε x < 0 $\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f(x) < f(0) ⇔ f(x) < 0 και για κάθε x > 0 $\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f(x) > f(0) ⇔ f(x) > 0.

γ) $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1) \xLongleftrightarrow[]{f\uparrow\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ "1-1"}$ |ημx| + 1 = |x| + 1
⇔ |ημx| = |x|
⇔ x = 0……………….(σελίδα 52 σχολικού βιβλίου)

δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι E = $\int_0^1 |f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_0^1 f(x)dx$.

$f'(x) > f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0$
$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - f(x))\,dx > 0$
$\Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f(x)dx > 0$
$\Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)dx > \int_0^1 f(x)dx$
$\Leftrightarrow [f(x)]_0^1 > \int_0^1 f(x)dx$
⇔ f(1) – f(0) > $\int_0^1 f(x)dx$
⇔ f(1) > $\int_0^1 f(x)dx$.
⇔ f(1) > E.



Εναλλακτικά για 0 ≤ x ≤ 1 $\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$ 0 ≤ f(x) ≤ f(1) (παραπάνω σχήμα). Το ίσον ισχύει μόνο για x = 0 και x = 1 αντίστοιχα. E = $\int_0^1 f(x)dx$ < (ΟΑΒΓ) = (ΟΑ)·(ΟΓ) = 1·f(1) = f(1).

47. **25765-4:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\,lnx + x, \quad x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση$f^{-1}(x) > x$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω g : IR → IR μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$, για κάθε $x \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}, x \in$ IR. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1, x = 1$. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με f '(x) = $\frac{2}{x} + 1 > 0$ για κάθε x > 0. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε αντιστρέφεται.

$D_{f^{-1}}$ = f((0,+∞)) $\overset{f\uparrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$= \left(\lim\limits_{x\to0^+}(2\ln x + x), \lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x + x)\right)$

= (-∞,+∞) = IR.

β) Η ανίσωση ορίζεται για κάθε x που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή για κάθε $x \in$ IR.
Επειδή για κάθε $x \in$ IR ισχύει $f^{-1}(x) \in D_f$ = (0,+∞), διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν x ≤ 0, τότε η ανίσωση αληθεύει (αφού $f^{-1}(x) > 0$) για κάθε $x \leq 0$.
- Αν x > 0, τότε $f^{-1}(x) > x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x)) > f(x)$

$\Leftrightarrow$ x > f(x)

$\Leftrightarrow$ x > 2lnx + x

$\Leftrightarrow$ lnx < 0

$\Leftrightarrow$ lnx < ln1

$\Leftrightarrow$ 0 < x < 1.

Επομένως λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x∈(-∞,1).

γ) i. Για κάθε x ≠ 0 είναι g(|x|) = 2ln|x|+|x|

= $\ln|x|^2$+|x|

= $\ln x^2$+|x|.

Επιπλέον, η g είναι συνεχής, άρα συνεχής και στο x_0 = 0, οπότε g(0) = $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

$= \lim\limits_{x\to0}(\ln x^2 + |x|)$ = 0.

Άρα, g(x) = $\ln x^2$+|x|, για κάθε x∈IR.

γ) ii. Η g είναι συνεχής στο διάστημα [-1,1] και g(x) ≥ 0 για κάθε x∈[-1,1], οπότε το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι Ε = $\int_{-1}^{1} x^2 e^{|x|}dx = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x}dx + \int_{0}^{1} x^2 e^{x}dx$

$= \int_{-1}^{0} x^2(-e^{-x})'dx + \int_{0}^{1} x^2(e^{x})'dx$

$\overset{\substack{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.\\ \text{}}}{\underset{o\lambda o\kappa\lambda.}{=}} [-e^{-x}x^2]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}(x^2)'e^{-x}dx + [e^{x}x^2]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}(x^2)'e^{x}dx$

$= e + 2\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx + e - 2\int_{0}^{1} xe^{x}dx$

$= 2e + 2\int_{-1}^{0} x(-e^{-x})'dx - 2\int_{0}^{1} x(e^{x})'dx$

$\overset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.}{\underset{o\lambda o\kappa\lambda.}{=}} 2e - 2[xe^{-x}]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}(x)'e^{-x}dx - 2[xe^{x}]_{0}^{1} + 2\int_{0}^{1}(x)'e^{x}dx$

$= \cancel{2e} - \cancel{2e} + 2\int_{-1}^{0} e^{-x}dx - 2e + 2\int_{0}^{1} e^{x}dx$

$= -2[e^{-x}]_{-1}^{0} - 2e + 2[e^{x}]_{0}^{1}$

= -2(1-e)-2e+2(e-1) = **…** = 2e-4.

48. **26183-4:** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4\ln x}{x}, \ x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) *Συνέχεια στο $x_0 = 1$*:

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} εφ\left(\frac{\pi x}{4}\right) = εφ\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.\\
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^-}\left(1-\frac{4lnx}{x}\right) = 1-\frac{4ln1}{1} = 1.
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}&\lim_{x\to1} f(x) = 1.\\ &f(1) = εφ\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = f(1).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 1.

Παράγωγος στο $x_0 = 1$:

- $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{εφ\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\left(εφ\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to1^-}\left(1+εφ^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi x}{4}\right)' = \frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to1^-}\left(1+εφ^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1+εφ^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}\cdot(1+1)1 = \frac{\pi}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-\frac{4lnx}{x}-1}{x-1} = -\lim\limits_{x\to1^+}\frac{4lnx}{x^2-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} -\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(4lnx)'}{(x^2-x)'} = -\lim\limits_{x\to1^+}\frac{4}{x(2x-1)} = -4.$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ δηλαδή η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$.

β) Από (α) ερώτημα, $f'(x) = \begin{cases}\frac{\pi}{4}\left(1+εφ^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right), αν\ 0 \le x < 1\\ 4\frac{lnx-1}{x^2} \quad , αν\ x > 1\end{cases}$.

Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος στα οποία είτε η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη, είτε η παράγωγός της μηδενίζεται.

Παρατηρούμε ότι f '(x) > 0 για κάθε x∈[0,1), ενώ για x > 1 είναι f΄(x)=0 ⇔ x=e.

Ώστε η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία, τα 1 και e.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι Ε = $\int_0^1 |f(x)|dx$, αφού η f είναι συνεχής στο [0,1].

Παρατηρούμε ότι για κάθε x∈[0,1] έχουμε $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{4}x \le \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow εφ0^0 \le εφ\left(\frac{\pi}{4}x\right) \le εφ\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 0 \le εφ\left(\frac{\pi}{4}x\right) \le 1,$

αφού η συνάρτηση εφx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,π/4].

Επομένως είναι

$$\begin{aligned}
Ε &= \int_0^1|f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx\\
&= \int_0^1 εφ\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} εφudu\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{ημu}{συνu}du\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{συνu}ημudu\\
&= -\frac{4}{\pi}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\omega}d\omega\\
&= -\frac{4}{\pi}[ln\omega]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{4}{\pi}\left(ln\frac{\sqrt{2}}{2}-ln1\right) = -\frac{4}{\pi}ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ldots = \frac{ln4}{\pi}\ \text{τετρ. μον.}
\end{aligned}$$

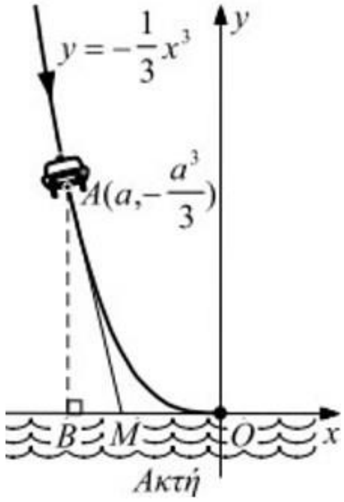
Θέτω u = $\frac{\pi x}{4}$.
(u)΄du = $\left(\frac{\pi x}{4}\right)' dx \Leftrightarrow$ du = $\frac{\pi}{4}dx$
$\Leftrightarrow$ dx = $\frac{4}{\pi}du$.
Όταν x = 0 τότε u = 0.
Όταν x = 1 τότε u = $\frac{\pi}{4}$.

Θέτω ω = συνu.
(ω)΄dω = (συνu)΄du
⇔ dω = -ημudu
⇔ ημudu = - dω
Όταν u = 0 τότε ω = συν0^0 = 1.
Όταν u = $\frac{\pi}{4}$ τότε ω = συν $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

49. 27031-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A.

(Μονάδες 06)



β) i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

(Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M.

(Μονάδες 2)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -x^2$, $x \le 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$, είναι η $y - \left(-\frac{\alpha^3}{3}\right) = -\alpha^2(x - \alpha)$

$$\Leftrightarrow \; y = -\alpha^2 x + \frac{2\alpha^3}{3} \quad (1)$$

β) i. Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Επομένως, η εφαπτομένη είναι η ευθεία ΑΜ. Για την εύρεση της τετμημένης του σημείου Μ, από την (1) για y = 0 έχουμε
Άρα, το σημείο έχει τετμημένη .
Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου είναι
και τη χρονική στιγμή , που είναι , έχουμε $0 = -\alpha^2 x + \frac{2\alpha^3}{3} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\alpha$.

Άρα $x(t) = \frac{2}{3}\alpha(t)$, οπότε $x'(t) = \frac{2}{3}\alpha'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)$

και τη χρονική στιγμή t_0, $x'(t_0) = -\frac{2}{3}\alpha(t_0)$

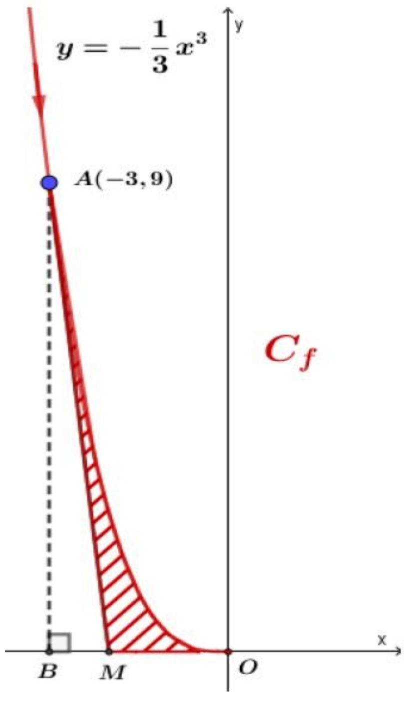
$= -\frac{2}{3} \cdot (-3)$

$= -2$ μον. μήκους/μον. χρόνου.

ii. Ο ρυθμός μεταβολής έχει θετικό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι η τετμημένη του σημείου , τη χρονική στιγμή t_0, αυξάνει.

Σχόλιο: Αυτό είναι λογικό και δικαιολογείται από την κίνηση του περιπολικού πάνω στην καμπύλη. Η κίνηση αυτή, αναγκάζει το σημείο να κινείται πάνω στον αρνητικό ημιάξονα προς τα δεξιά.

γ) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι $E(\Omega) = E_1 - E_2$, όπου E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και την κατακόρυφη ευθεία x = -3, και E_2 είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΜ (διπλανό σχήμα).



$E_1 = \int_{-3}^{0} |f(x)|dx = \int_{-3}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) dx$………γιατί f(x) > 0 για x < 0

$= -\frac{1}{12}[x^4]_{-3}^{0}$

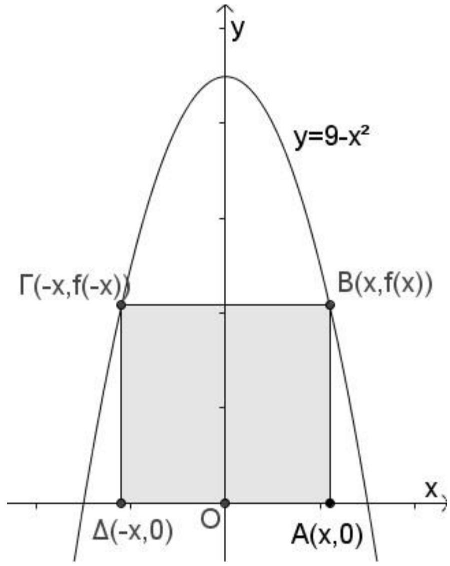
$= \ldots = \frac{27}{4}$ τ.μ..

$E_2 = \frac{1}{2}(AB)\cdot(BM) = \frac{1}{2}(x_M - x_B)\cdot y_B$

$= \frac{1}{2}(-2-(-3))\cdot 9 = \ldots = \frac{9}{2}$ τ.μ..

Τελικά, είναι $E(\Omega) = {}^{27}/_{4} - {}^{9}/_{2} = \ldots = {}^{9}/_{4}$ τ.μ..

50. 27408-4: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x \in [0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 18x - 2x^3$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Οι διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι (ΑΔ) = 2x και (ΑΒ) = f(x) = 9 – x^2 με $x \in [0,3]$. Επομένως το εμβαδό του δίνεται από την συνάρτηση Ε(x) = (ΑΒ)(ΑΔ) = $2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$, $x \in [0,3]$.

β) $E'(x) = (18x - 2x^3)' = 18 - 6x^2$.

• $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$, γιατί $x \geq 0$.

x	0 $\sqrt{3}$ 3	
Ε΄(x)	+	○ -
Ε(x)	↗	↘

Ο.Μ $E(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$

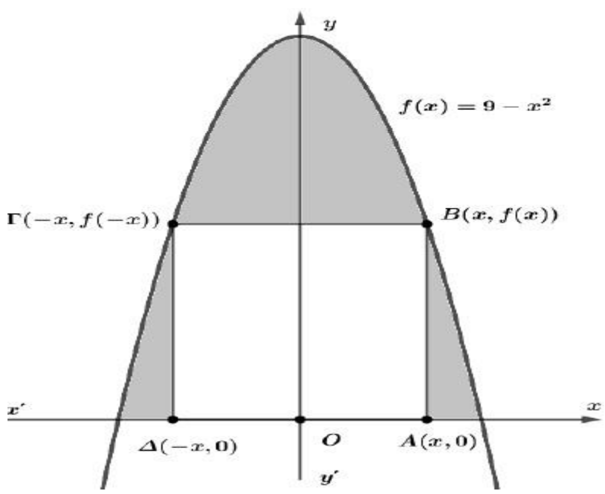
Η συνάρτηση Ε(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \sqrt{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{3}, 3]$.

γ) Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο, όταν $x = \sqrt{3}$. Τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $(ΑΔ) = 2\sqrt{3}$ και $(ΑΒ) = 9 - \sqrt{3}^2 = 6$, οπότε η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με (ΑΒ) • (ΑΔ) = 6 • $2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

δ) Η συνάρτηση Ε(x) τέμνει τους άξονες στα σημεία (3,0) και (-3,0) αφού είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2$ $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x=3$ αφού $x \geq 0$.

Επιπλέον είναι f(x) > 0 για κάθε $x \in (0,3)$, επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε(Ω) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x' x και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι λόγω και του ερωτήματος (γ):

$$E(\Omega) = \int_{-3}^{3} f(x)dx - (ΑΒΓΔ)$$
$$= \int_{-3}^{3}(9 - x^2)dx - 12\sqrt{3}$$
$$= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} - 12\sqrt{3}$$
$$= \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right) - 12\sqrt{3}$$
$$= 27 - 9 + 27 - 9 - 12\sqrt{3}$$
$$= 36 - 12\sqrt{3} \text{ τετρ. μον.}$$



51. 28476-4: Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR → IR για την οποία ισχύουν $\lim_{x\to1}\frac{f(x)(x-1)}{lnx}=0$ και $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in$ IR.

α) **i.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to1}\frac{lnx}{x-1}$ (Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$. (Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x\in$ IR. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=0$ και $x=1$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) i. $\lim_{x\to1}\frac{lnx}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{(lnx)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=1$.

ii. Θέτω $g(x)=\frac{f(x)(x-1)}{lnx}$. Τότε $\lim_{x\to1}g(x)=0$ και για $0<x\neq1$ είναι $f(x)=g(x)\frac{lnx}{x-1}$ οπότε

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}g(x)\frac{lnx}{x-1}=0\cdot1=0$.Άρα

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο ως παραγωγίσιμη, επομένως είναι συνεχής στο 1, οπότε $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=0$.

β) Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, διότι $f(1)=0$. Επειδή $f'(x)=\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in$ IR , η είναι γνησίως αύξουσα στο IR και επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

γ) Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο IR, επομένως, έχουμε:

- Για $0<x<1\Leftrightarrow f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$.
- Για $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$.
- Για $x=1\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow f(x)=0$.

δ) Επειδή για $0<x<1$ είναι $f(x)<0$ έχουμε $E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx$

$=-\int_0^1(x)'f(x)dx$

$\underset{ολοκλ.}{\overset{παραγ.}{=}}-[xf(x)]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx$

$=-\underset{0}{\cancel{f(1)}}+\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$

Θέτω $u=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow x=\sqrt{u^2-1}$ αφού $x>0$.
$(x)'dx=(\sqrt{u^2-1})'du\Leftrightarrow dx=\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}du$.
Όταν $x=0$ τότε $u=1$.
Όταν $x=1$ τότε $u=\sqrt2$.

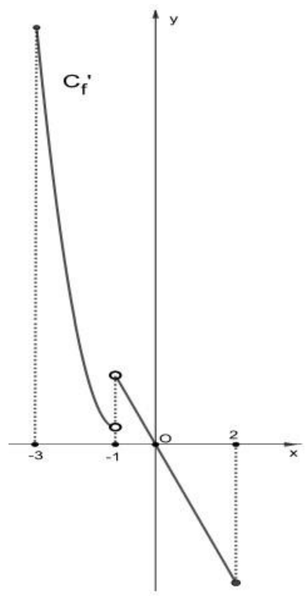
$=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$

$=\int_1^{\sqrt2}u\,\cancel{\sqrt{u^2-1}}\,\frac{u}{\cancel{\sqrt{u^2-1}}}\,du$

$=\int_1^{\sqrt2}u^2du$

$=\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt2}=\ldots=\frac{2\sqrt2-1}{3}$.

52. 28870-4: Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [-3,2], η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f,η $C_{f'}$ που στο διάστημα (-1,2] είναι ευθύγραμμο τμήμα.



α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f, αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους. (Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx=-4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$. (Μονάδες 06)

Λύση:

α) • Η f στο [-3,-1] είναι συνεχής και ισχύει f ’(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος (-3, -1), αφού η $C_{f'}$ βρίσκεται πάνω από άξονα x'x.

• Η f στο [-1,0] είναι συνεχής και ισχύει f ‘(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος (-1,0), αφού η $C_{f'}$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

• Η f είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει f ’(x) < 0 για κάθε x ∈ (0,2), αφού η $C_{f'}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx΄.

Το πρόσημο της f ' και η μονοτονία της f, φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα.

x	-3 -1	0	2
f'	+	+	-
f	↗	↗	↘

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο [-3,0], αφού είναι συνεχής στο -1 και γνησίως φθίνουσα στο [0,2].

β) i. Η f είναι συνεχής στο διάστημα [-3,2]. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία της που δεν ορίζεται η παράγωγός της f ' και τα σημεία στα οποία η f ' μηδενίζεται.

• Από την υπόθεση έχουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1, οπότε το -1 είναι ένα κρίσιμο σημείο της f.

• Επίσης από το σχήμα βλέπουμε ότι η f ' μηδενίζεται στο 0, αφού η γραφική της παράσταση διέρχεται από το Ο(0,0). Επομένως και το σημείο 0 είναι ένα κρίσιμο σημείο της f.

ii. Πιθανές θέσεις τοπικά ακροτάτων της f στο διάστημα [-3,2] είναι τα κρίσιμα σημεία της και τα άκρα του διαστήματος [-3.2]. Το -1, αν και κρίσιμο σημείο της f, δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η f ' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Ενώ το 0 είναι θέση τοπικού μεγίστου, αφού η f ' μηδενίζεται σ' αυτό, αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του 1 και η f είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,0] και Φθίνουσα στο [0,2]. Επίσης τα σημεία -3 και 2, που είναι άκρα του πεδίου ορισμού της f, είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων.

γ) Η f ' είναι συνεχής στο [0,2] και η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx΄ στο διάστημα (0,2]. Οπότε, για το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f ', τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x=0 και x=2 έχουμε Ε = $-\int_0^2 f'(x)dx$ = -(-4) = 4.

Ε = $\frac{1}{2}$ · 2 · |f '(2)| ⇔ 4 = $\frac{1}{2}$ · 2 · |f '(2)| ⇔ |f '(2)| = 4 ⇔ f '(2) = - 4, αφού f '(2) < 0.

53. 29645-4: Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2+1, x<0 \\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$. (Μονάδες 12)

β) i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος (α). (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$. (Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και την ευθεία x=0. (Μονάδες 05)

Λύση:

α) • $\begin{Bmatrix} f(x)=0 \\ x<0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3x^2+1=0 \\ x<0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ η μοναδική αρνητική ρίζα της f.

• $\begin{Bmatrix} f(x)=0 \\ x\geq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -x^3+3x^2+1=0 \\ x<0 \end{Bmatrix}$.

Για x > 0, f ‘(x) = $-3x^2+6x$ = 3x(-x+2), η οποία είναι θετική για 0 < x < 2 οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και αρνητική για x > 2 οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR, αφού είναι συνεχής στα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞) ως πολυωνυμική και είναι συνεχής και στο x = 0 αφού $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$. Άρα:

♦ $f((0,2)) \overset{f\uparrow}{=} \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 2} f(x)\right)$ = (1,5).

Επειδή $0 \notin f((0,2))$, η εξίσωση f(x) = 0 δεν έχει ρίζα στο διάστημα (0,2).

♦ $f((2,+\infty)) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to2} f(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+3x^2+1), \lim\limits_{x\to2}(-x^3+3x^2+1)\right) = (-\infty,5)$.

Επειδή $0 \in f((2,+\infty))$, η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2 στο διάστημα $(2,+\infty)$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα είναι μοναδική.

Επίσης $f((3,+\infty)) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to3} f(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+3x^2+1), \lim\limits_{x\to3}(-x^3+3x^2+1)\right) = (-\infty,1)$ και $0 \in f((3,+\infty))$, η εξίσωση f(x) = 0 έχει την ρίζα x_2 στο διάστημα $(3,+\infty)$, δηλαδή $x_2 > 3$.

β) i. ● Στο διάστημα $[x_1,x_2]$ είναι συνεχής, γιατί είναι συνεχής στο IR.

● Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στο ανοικτό διάστημα (x_1,x_2):

→ Στο διάστημα (-∞,0) είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (-3x^2+1)' = -6x$.

→ Στο διάστημα (0,+∞) είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (-x^3+3x^2+1)' = -3x^2+6x$.

→ Στο x = 0:

♦ $\lim\limits_{\substack{x\to0^-\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{-3x^2+1-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^-} \frac{-3x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^-}(-3x) = 0$.

♦ $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-x^3+3x^2+1-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-x^3+3x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x(-x^2+3x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+}(-x^2+3x) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, η συνάρτηση παραγωγίζεται στο x = 0 και είναι $f'(0) = 0$.

Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο IR, με $f'(x) = \begin{cases} -6x, & x \le 0 \\ -3x^2+6x, & x > 0 \end{cases}$, επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο διάστημα (x_1,x_2).

● $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

ii. ● Για x ≤ 0: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Για x > 0: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2+6x = 0 \Leftrightarrow -3x(2-x) = 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x = 2$.

γ)

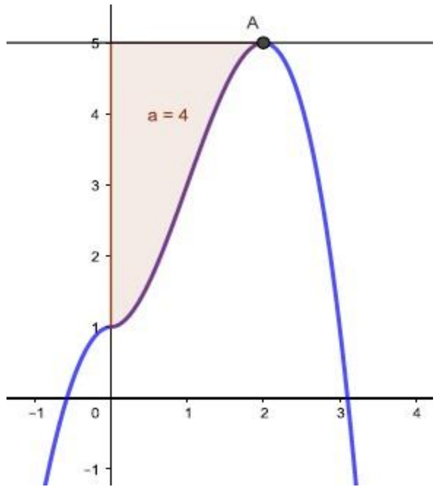
x	-∞		0		2		+∞
-6x		+	0	-		-	
$-3x^2+6x$		-	0	+	0	-	
f '(x)		+	0	+	0	-	
f(x)		↗		↗		↘	

Από τον πίνακα μεταβολών, προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-∞,2] αφού είναι συνεχής στο x = 0 και γνησίως φθίνουσα στο [2,+∞). Στο x = 2 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το f(2) = 5. Άρα η εφαπτομένη (ε) στο σημείο (2,f(2)) έχει εξίσωση y – f(2) = f '(2)(x – 2) ⇔ y – 5 = 0 ⇔ y = 5
και επειδή f(x) ≤ 5, η ευθεία (ε) βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f (διπλανό σχήμα), οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_0^2 (5 - f(x))dx = \int_0^2 (5 + x^3 - 3x^2 - 1)dx$

$= \int_0^2 (4 + x^3 - 3x^2)dx$

$= \left[4x + \frac{x^4}{4} - x^3\right]_0^2$

$= 8 + 4 - 8 = 4$ τ.μ.



54. 29646-4: Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f. (Μονάδες 9)

ii. Τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 8)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα y'y. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) i. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0,+∞) ως πολυωνυμική, με $f'(x) = -3x^2+6x$ και $f''(x) = -6x+6$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

Το πρόσημο της f ' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	2	$+\infty$
f'	+	-	
f	↗	↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,2] και γνησίως φθίνουσα στο [2,+∞). Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο άκρο του διαστήματος $x_1 = 0$ το $f(0) = 1$ και ολικό μέγιστο στο $x_2 = 2$ το $f(2) = 5$, οπότε Α(0,1) και Β(2,5).

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x+6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Το πρόσημο της f '' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
f''	+	-	
f	⌣	⌢	

Η f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο [0,1] και κοίλη ή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο [1,+∞). Σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι το Γ(1,3).

ii. Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 = x_\Gamma$

και $y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 = y_\Gamma$

Άρα το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

β) $\lambda_{AB} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} = \frac{1-5}{0-2} = 2$, οπότε η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι: $y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A)$

$\Leftrightarrow y - 1 = 2x$

$\Leftrightarrow y = 2x + 1$.

Έστω E_1 και E_2 τα εμβαδά των δυο χωρίων στα διαστήματα [0,1] και [1,2] αντίστοιχα.

• Στο διάστημα (0,1) η συνάρτηση είναι κυρτή, οπότε η ευθεία ΑΒ βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f, οπότε $E_1 = \int_0^1 (2x+1-f(x))dx = \int_0^1 (2x+1+x^3-3x^2-1)dx$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}.$$

• Στο διάστημα (1,2) η συνάρτηση είναι κοίλη, οπότε η ευθεία ΑΒ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f, οπότε $E_2 = \int_1^2 (f(x) - 2x - 1)dx$

$= \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 + 1 - 2x - 1)dx$

$= \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx$

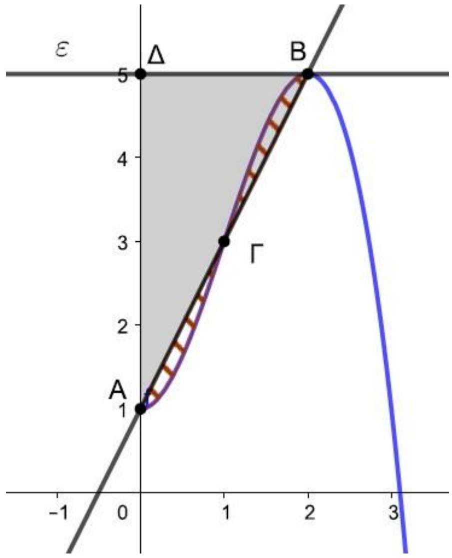
$= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2$

$= -4 + 8 - 4 - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right)$

$= \frac{1}{4}$.

Άρα $E_1 = E_2$.

γ) Από το διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι Ε = (ΑΒΔ) + E_1 – E_2 = =(ΑΒΔ), αφού $E_1 = E_2$.



Εναλλακτικά (ΑΒΔ) = $\frac{1}{2}$(ΑΔ)(ΔΒ) = $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2$ = 4τ.μ. και

Ε=$\int_0^2 (5 - f(x))dx = \int_0^2 (5 + x^3 - 3x^2 - 1)dx$

$= \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 4)dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_0^2$

= 4 – 8 + 8

= 4τ.μ.

Άρα Ε = (ΑΒΔ).

55. 31148-4: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in R$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in$IR.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in$IR. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z.

(i) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$. (Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = ln2$ και $x = 1$, είναι $ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x} \geq e^{-x}$

$\Leftrightarrow x^2+1 \geq e^x e^{-x}$

$\Leftrightarrow x^2+1 \geq e^0$

$\Leftrightarrow x^2+1 \geq 1$

$\Leftrightarrow x^2 \geq 0$ που ισχύει. Το ίσον αν και μόνον αν x = 0.

$\Leftrightarrow x^2+1 \geq 1$

β) (i) Από την εκφώνηση έχουμε τα σημεία Δ(0,f(x)) και Z(x,g(x)). Από το (α) ερώτημα προκύπτει ότι
Ε(x) = (ΒΓΖΔ) = (ΒΓ) • (ΓΖ)

= x(f(x) – g(x)) • x

$= x\left(\frac{x^2+1}{e^x} - e^{-x}\right)$

$= x\left(\frac{x^2+1-e^x e^{-x}}{e^x}\right)$

$= x\left(\frac{x^2+1-e^0}{e^x}\right)$

$= x\left(\frac{x^2+1-1}{e^x}\right)$

$= x\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \frac{x^3}{e^x}$.

(**ii**) Για κάθε x > 0 έχουμε Ε'(x) = $\left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{3x^2e^x - x^3e^x}{e^{2x}}$

$= \frac{x^2e^x(3-x)}{e^{2x}}$

$= \frac{x^2(3-x)}{e^x}$.

Άρα, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	0	3	$+\infty$
$E'(x)$	$+$		$-$
$E(x)$	↗	Ο.Μ.	↘

Έτσι για x = 3 το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΖΔ μεγιστοποιείται.

γ) Αφού h(x) > 0 για κάθε x ∈ [ln2,1] και h(x) συνεχής, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

Ε(Ω) = $\int_{ln2}^{1} h(x)dx = \int_{ln2}^{1} xe^{-x}dx$

$= \int_{ln2}^{1} x(-e^{-x})'dx$

$\overset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.}{\underset{o\lambda o\kappa\lambda.}{=}} [-xe^{-x}]_{ln2}^{1} + \int_{ln2}^{1}(x)'e^{-x}dx$

$= \left[-\frac{x}{e^x}\right]_{ln2}^{1} + \int_{ln2}^{1} e^{-x}dx$

$= -\frac{1}{e} + \frac{ln2}{e^{ln2}} - [e^{-x}]_{ln2}^{1}$

$= -\frac{1}{e} + \frac{ln2}{2} - \left[\frac{1}{e^x}\right]_{ln2}^{1}$

$= -\frac{1}{e} + \frac{ln2}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^{ln2}}$

$= -\frac{1}{e} + \frac{ln2}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1+ln2}{2} - \frac{2}{e}$

$= \frac{lne+ln2}{2} - \frac{2}{e}$

$= \frac{1}{2}ln2e - \frac{2}{e}$

$= ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

56. **31149-4:** Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x \in (0,+\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $ln(1+f(x)) - ln(f(x)) > f^2(x)\cdot f(ln2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $ln\left(\frac{27}{4e}\right)$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Για κάθε x > 0 έχουμε $1 + \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > ln1 = 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Για κάθε x > 0 έχουμε f '(x) = $\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right)' = \frac{\left(ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'x^2 - 2xln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^4}$

$$= \frac{\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}x - 2ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$
$$= \frac{x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - 2ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$
$$= \frac{\frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} - 2ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$
$$= \frac{-\frac{1}{x+1} - 2ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$
$$= -\frac{\frac{1}{x+1} + 2ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$
$$= -\frac{\frac{1}{x+1} + 2x^2 f(x)}{x^3} < 0 \text{ γιατί } f(x) > 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) $ln(1+f(x)) - ln(f(x)) > f^2(x)\cdot f(ln2) \Leftrightarrow ln\left(\frac{1+f(x)}{f(x)}\right) > f^2(x)\cdot f(ln2)$

$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)}{f^2(x)} > f(ln2)$$

⇔ f(f(x)) > f(ln2)

$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}$ f(x) < ln2

Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα ln

⇔ f(x) < f(1)

$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}$ x > 1.

γ) Καθώς f(x) > 0 για κάθε x > 0, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι E = $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

Θέτω $u = 1+\frac{1}{x}$.

Τότε (u)'du = $\left(1+\frac{1}{x}\right)'$dx ⇔ du = $-\frac{1}{x^2}dx$

⇔ $\frac{1}{x^2}dx$ = -du.

Όταν x = ½, τότε u = 3

Όταν x = 1. τότε u = 2

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right)dx$$
$$= -\int_{3}^{2} lnudu$$
$$= \int_{2}^{3} lnudu$$
$$= [ulnu - u]_2^3$$

= 3ln3 – 3 – 2ln2 + 2

= $ln3^3 - ln2^2 - 1$

= ln27 – ln4 – lne

$= ln\frac{27}{4e}$.

57. 31530-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2, x \in$ IR.

α) **i.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1). (Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1. (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1,4)$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) **i.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με f ‘(x) = $3x^2+5 > 0$ για κάθε $x \in$ IR, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Επιπλέον, f(0) = - 2 < 0 και f(1) =1+5 – 2 = 4> 0, οπότε f(0)f(1) < 0 οπότε από το Θ. Bolzano υπάρχει x_0 στο διάστημα (0,1), μοναδικό λόγω της μονοτονίας της f, ώστε $f(x_0) = 0$. Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx΄σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 που περιέχεται στο διάστημα (0,1).

ii) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{17}{8} > 0$ οπότε $f(0)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, οπότε και πάλι από το Θ. Bolzano το x_0 περιορίζεται στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, δηλαδή ο αριθμός x_0 είναι πιο κοντά στο 0 παρά στο 1.

β) Ο αριθμός θ είναι θετικός, οπότε $x_0 - \theta < x_0 < x_0 + \theta \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0 - \theta) < f(x_0) < f(x_0 + \theta)$
$\Leftrightarrow f(x_0 - \theta) < 0 < f(x_0 + \theta)$.

Άρα $\frac{f(x_o+\theta)}{f(x_o-\theta)} < 0$……..(1)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x_o+\theta)}{f(x_o-\theta)}x^2 = \frac{f(x_o+\theta)}{f(x_o-\theta)}(-\infty)^2 = -\infty$ …….. λόγω της (1).

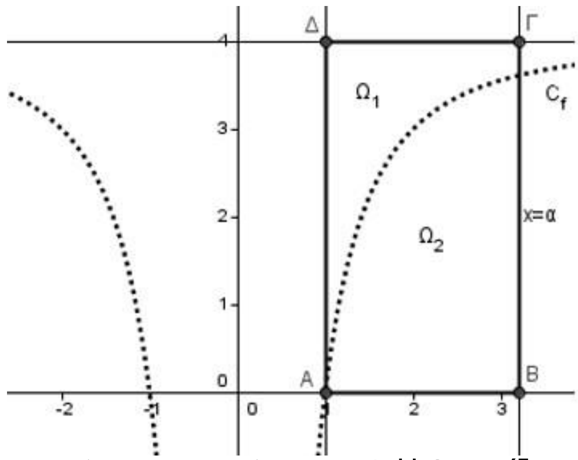
γ) Επειδή το Α είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, αφού f(1)=4, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α είναι y – f(1) = f ‘(1)(x – 1) ⇔ y – 4 = 8(x – 1)
⇔ y = 8x – 4.

Επειδή f ΄΄(x) = 6x >0 στο διάστημα [1,2], η f είναι κυρτή, οπότε η C_f είναι από την εφαπτομένη και πάνω.
Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι Ε(Ω) = $\int_1^2(f(x) - 8x + 4)dx = \int_1^2(x^3 + 5x - 2 - 8x + 4)dx$
$= \int_1^2(x^3 - 3x + 2)dx$
$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2$
$= 4 - 6 + 4 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right)$
$= \ldots = \frac{5}{4}$.

58. 31533-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}, x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f. (Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1x_2 = -4$. (Μονάδες 6)



γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = \alpha, \alpha > 1$και $y = 4$. Η C_fχωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2.

i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1), E(\Omega_2)$ των χωρίων. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με f '(x) = $\frac{8}{x^3}$ και f ΄΄(x) = $-\frac{24}{x^4}$, απ' όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-∞,0).
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,+∞).
- κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞).

Επιπλέον, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(4 - \frac{4}{x^2}\right)$ = 4 – 0 = 4, οπότε η ευθεία y = 4 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∞ και στο -∞.

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία Α, Β είναι κάθετες, τότε έχουμε f ‘(x_1) · f ‘(x_2) = - 1
$\Leftrightarrow \frac{8}{x_1^3}\cdot\frac{8}{x_2^3} = -1$

$\Leftrightarrow x_1^3 x_2^3$ = - 64
$\Leftrightarrow$ $(x_1x_2)^3$ = - 64
$\Leftrightarrow$ x_1x_2 = - 4.

γ) i. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι (ΑΒΓΔ) = 4(α – 1), α > 1 και

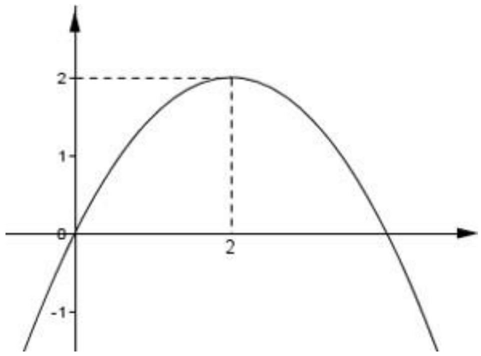
$E(\Omega_2) = \int_1^{\alpha} f(x)dx = \int_1^{\alpha}\left(4 - \frac{4}{x^2}\right)dx$
$= \left[4x + \frac{4}{x}\right]_1^{\alpha}$
$= 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 4 - 4$
$= 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 8.$

$E(\Omega_1)$ = (ΑΒΓΔ) – $E(\Omega_2)$ = 4(α – 1) – $4\alpha - \frac{4}{\alpha} + 8$
$= \cancel{4\alpha} - 4 - \cancel{4\alpha} - \frac{4}{\alpha} + 8$
$= 4 - \frac{4}{\alpha}$.

ii. $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{\alpha} = 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 8$
$\Leftrightarrow 4\alpha - 4 = 4\alpha^2 + 4 - 8\alpha$
$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\alpha + 8 = 0$
$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0.$

Δ = 1 και $\alpha_1 = 1$ (απορρίπτεται γιατί α > 1) ή $\alpha_2 = 2$.
Επομένως τα δυο χωρία είναι ισεμβαδικά μόνο όταν α = 2 .

59. 31534-4: Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2,2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f : IR → IR.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, x \in$ IR.

(Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 1), να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1.$

(Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x,\ x \in$ IR.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$και $x = \pi$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Από τα δεδομένα του σχήματος προκύπτει ότι f '(x) = αx^2+βx+ γ, α < 0 και f '(0) = 0, οπότε γ=0.
Η συνάρτηση f ' παρουσιάζει μέγιστο για x = 2, οπότε είναι f ΄΄(2) = 0 και επιπλέον f ' (2) = 2.
f ΄΄(x) = 2αx+β.

$\begin{Bmatrix} f'(2) = 2 \\ f''(2) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4\alpha + 2\beta = 2 \\ 4\alpha + \beta = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ β=2 και α = $-\frac{1}{2}$.

Άρα f '(x) = $-\frac{1}{2}x^2$+2x, $x \in$ IR.

β) Από το ερώτημα (α) ⇔ f(x) = συμπεραίνουμε ότι +X2 +c, CEIR και f(O)=1, οπότε c =1.σκουμε αΆρα

f(x) = $-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + x^2 + c$ ………(1)

(1) $\overset{x=0}{\Longleftrightarrow}$ f(1) = c ⇔ c = 1.

(1) $\overset{c=1}{\Longleftrightarrow}$ f(x) = $-\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$.

γ) i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε x > 0 ισχύει g(x) > f(x) ⇔ $x^2 + x + 1 - \eta\mu x > -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^3$ + x – ημx > 0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x) = $\frac{1}{6}x^3$ + x – ημx, x > 0.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με h'(x) = $\frac{1}{2}x^2$ + 1 – συνx

h''(x) = x + ημx

h'''(x) = 1+συνx ≥ 0.

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0. Άρα η h''(x) είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα για x > 0 ⇔ h''(x) > h''(0) ⇔ h''(x) > 0 οπότε η h'(x) είναι γνησίως αύξουσα για κάθε x > 0.

Άρα για x > 0 ⇔ h'(x) > h'(0) ⇔ h'(x) > 0 οπότε η h(x) είναι γνησίως αύξουσα για κάθε x > 0.

Άρα για x > 0 ⇔ h(x) > h(0) ⇔ $\frac{1}{6}x^3$ + x – ημx > 0.

__Εναλλακτικά__ |ημx| < |x| για κάθε x > 0 $\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}$ |ημx| < x ⇔ – x < ημx < x ⇒ x – ημx > 0
και επειδή για κάθε x > 0 είναι $\frac{1}{6}x^3$ > 0 $\Big\}\overset{(+)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{6}x^3$ + x – ημx > 0.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_g, C_f και τις ευθείες x = 0 και x = π είναι Ε(Ω) = $\int_{-0}^{\pi}(g(x)-f(x))dx$ = $\int_{-0}^{\pi}\left(\frac{1}{6}x^3 + x - ημx\right)dx$

$= \left[\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}+συνx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi^4}{24}+\frac{\pi^2}{2}+συν\pi-συν0^0$

$= \frac{\pi^4}{24}+\frac{\pi^2}{2}-1-1$

$= \left(\frac{\pi^4}{24}+\frac{\pi^2}{2}-2\right)$ τ.μ..

60. **31792-4:** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2+x+1\,, & -1\le x<1 \\ 1+\frac{(lnx)^2}{x}\,, & x\ge 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$. (Μονάδες 9)

__Λύση__:

α) *__Συνέχεια στο x = 1__*:

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(-x^2+x+1) = 1$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{(lnx)^2}{x}\right) = 1+0 = 1$

$\Big\} \Leftrightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = 1.$

Άρα υπάρχει το $\lim_{x\to1} f(x)$ = 1 = f(1) και η f είναι συνεχής στο 1,

__Παραγωγισιμότητα στο x = 1__:

$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{-x^2+x+1-1}{x-1}$

$= \lim_{x\to1^-}\frac{-x^2+x}{x-1}$

$= \lim_{x\to1^-}\frac{-x(x-1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to1^-}(-x)$

= -1,

ενώ $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{1+\frac{(lnx)^2}{x}-1}{x-1}$

$= \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{(lnx)^2}{x}}{x-1}$

$= \lim_{x\to1^+}\frac{(lnx)^2}{x-1}\cdot \cancel{\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}}$ 1

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{(lnx)^2}{x-1}$$
$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to1^+} \frac{[(lnx)^2]'}{(x-1)'}$$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2lnx(lnx)'}{1}$$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2lnx}{x}$$
$$= 0.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Από το (α) ερώτημα, προκύπτει ότι ένα κρίσιμο σημείο είναι το $x_0 = 1$.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν εσωτερικά σημεία του διαστήματος $[-1,+\infty)$ στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται, διότι και αυτά είναι κρίσιμα σημεία.

Για $-1 \leq x < 1$ είναι $f'(x) = (-x^2 + x + 1)' = -2x + 1$.

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = \left(1 + \frac{(lnx)^2}{x}\right)' = \frac{2xlnx(lnx)'-(lnx)^2}{x^2}$

$$= \frac{2lnx-(lnx)^2}{x^2}$$
$$= \frac{lnx(2-lnx)}{x^2}.$$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} -2x+1, & αν -1 \leq x < 1 \\ \frac{lnx(2-lnx)}{x^2}, & αν\ x > 1 \end{cases}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 = 0, & αν -1 \leq x < 1 \\ \frac{lnx(2-lnx)}{x^2} = 0, & αν\ x > 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & αν -1 \leq x < 1 \\ \frac{lnx(2-lnx)}{x^2} = 0, & αν\ x > 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & αν -1 \leq x < 1 \\ 2 - lnx = 0, & αν\ x > 1,\ lnx > ln1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & αν -1 \leq x < 1 \\ x = e^2, & αν\ x > 1 \end{cases}.$$

Ώστε υπάρχουν τρία κρίσιμα σημεία, τα $x = ½$, $x = 1$ και $x = e^2$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x\in[1,e]$, έχουμε $x > 1 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow$

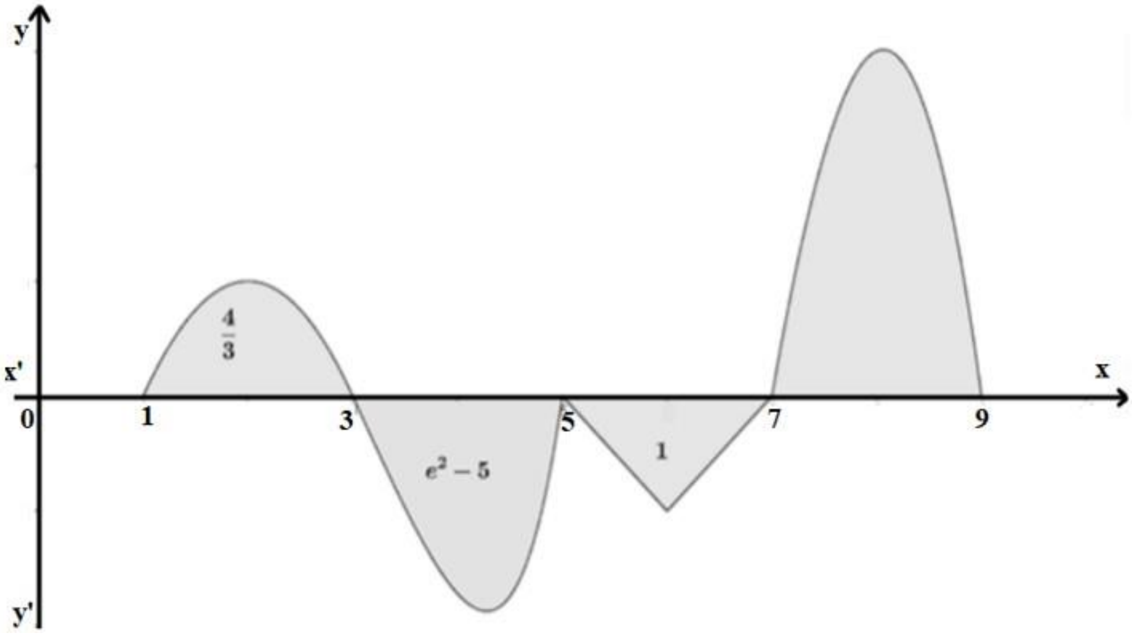
$$\Leftrightarrow g(x) = e^{-x} < e^{-1} < e^0 = 1 < 1 + \frac{(lnx)^2}{x} = f(x).$$

Ώστε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_1^e |g(x) - f(x)|dx$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θέτω u = lnx.
(u)'du = (lnx)'dx ⇔ du = $\frac{1}{x}dx$.
Όταν x = 1 τότε u = ln1 = 0.
Όταν x = e τότε u = lne = 1.

$$\overset{f(x)>g(x)}{=} \int_1^e (f(x) - g(x))dx$$
$$= \int_1^e \left(1 + \frac{(lnx)^2}{x} - e^{-x}\right) dx$$
$$= \int_1^e dx + \int_1^e (lnx)^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^e (-e^{-x})dx$$
$$= [x]_1^e + \int_0^1 u^2 du + [e^{-x}]_1^e$$
$$= e - 1 + \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 + e^{-e} - e^{-1}$$
$$= e - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{e^e} - \frac{1}{e}$$
$$= e - \frac{2}{3} + \frac{1}{e^e} - \frac{1}{e} \text{ τ.μ..}$$

61. 32800-2: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x)\,dx\right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες $1, 3, 5, 7$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)\,dx = 4$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,9]$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)\,dx$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Η συνεχής συνάρτηση f είναι μη αρνητική στο διάστημα [7,9] και δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, άρα $\int_7^9 f(x)\,dx > 0$. Συνεπώς $\int_7^9 f(x)\,dx = 4$.

β) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^9 |f(x)|\,dx = \int_1^3 |f(x)|\,dx + \int_3^5 |f(x)|\,dx + \int_5^7 |f(x)|\,dx + \int_7^9 |f(x)|\,dx$

$$= \frac{4}{3} + e^2 - 5 + 1 + 4$$
$$= \frac{4}{3} + e^2 \text{ τ.μ..}$$

γ) Γνωρίζουμε ότι το $\int_1^9 f(x)\,dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x'x.

Άρα $\int_1^9 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx + \int_7^9 f(x)\,dx$

$$= \frac{4}{3} - e^2 + 5 - 1 + 4$$
$$= 8 + \frac{4}{3} - e^2.$$
$$= \frac{28}{3} - e^2.$$

62. END.