# ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

## ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Φυσικοί: N={0, 1, 2, 3,…}
   N*={1, 2, 3,…}
2. Ακέραιοι: Z={0, ±1, ±2, ±3,…}
   Z*={±1, ±2, ±3,…}
3. Ρητοί: Q=$\left\{\frac{\alpha}{\beta}/\alpha \in Z, \beta \in Z^*\right\}$
   Q*=Q-{0}
4. Άρρητοι $Q^c$ ή Q΄={x/x∉Q}
5. Πραγματικοί: R=Q ∪Q΄
   R*=R-{0}

Θετικοί Πραγματικοί: $R_+$

Αρνητικοί Πραγματικοί: $R_-$

## ΣΥΝΟΛΑ

### Συμβολισμοί- ορισμοί

| σύμβολο | επεξήγηση |
|---|---|
| x∈A | «Το x είναι στοιχείο του A». |
| x∉A | «Το x δεν είναι στοιχείο του A». |
| ∅={ } | «Κενό σύνολο». Το σύνολο που δεν έχει στοιχεία. |
| A=B | «Ίσα σύνολα». |
| A⊂B | «Το A υποσύνολο του B». Κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. |
| A⊆B | «Το A υποσύνολο ή ίσο του B». A⊂B ή A=B. |
| Ω | Γενικό σύνολο. Μπορεί να είναι σύνολα ή υποσύνολα αριθμών. |
| A∪B | «A ένωση B»={x∈Ω/ x∈A ή x∈B}. |
| A∩B | «A τομή B»={x∈Ω/ x∈A & x∈B}. |
| A-B | «διαφορά»= {x∈Ω/ x∈A & x∉B}. |
| A΄ | «συμπλήρωμα του A» = {x∈Ω/ x∉A}. |

### Διαστήματα

Έστω α<β.

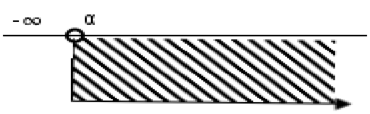
☛ (α,β)={x∈R/α<x<β} ανοικτό διάστημα.


☛ [α,β]={x∈R/α≤x≤β} κλειστό διάστημα.


☛ [α,β)={x∈R/α≤x<β} κλειστό αριστερά.


☛ (α,β]={x∈R/α<x≤β} κλειστό δεξιά.

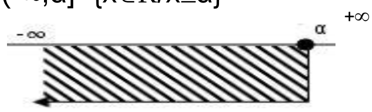

☛ (α,+∝)={x∈R/x>α}




☛ (-∝,α)={x∈R/x<α}


☛ [α,+∝)={x∈R/x≥α}


☛ (-∝,α]={x∈R/x≤α}




## ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

**α)** α<β $\overset{ορ}{\Leftrightarrow}$α-β<0 **β)** α>β $\overset{ορ}{\Leftrightarrow}$α-β>0

**γ)** α≤β $\overset{ορ}{\Leftrightarrow}$α-β≤0 **δ)** α≥β $\overset{ορ}{\Leftrightarrow}$α-β≥0

### Ιδιότητες

1. *μεταβατική*: $\left.\begin{matrix}\alpha<\beta\\ \beta<\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha<\gamma$.
   Ισχύει για όλα τα είδη ανισώσεων: >, ≤, ≥.
2. *αυτοπαθητική*: α≤α και α≥α
3. *αντιθετοαντιστροφή*: $\left.\begin{matrix}\alpha\le\beta\\ \alpha\ge\beta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \alpha=\beta$
4. $\left.\begin{matrix}\alpha\le\beta\\ \gamma\le\delta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \alpha+\gamma\le\beta+\delta$
   Ισχύει για όλα τα είδη ανισώσεων. Ισχύει επίσης και όταν η μια από τις δυο είναι αυστηρή ανίσωση.
5. *Όταν πολ/ζουμε τα μέλη μιας ανίσωσης με θετικό αριθμό, η φορά της ανίσωσης παραμένει ως έχει, και όταν πολ/ζουμε με αρνητικό, η φορά της ανίσωσης αλλάζει.*
   Πχ $\left.\begin{matrix}\alpha\le\beta\\ \gamma>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \alpha\gamma\le\beta\gamma$ και $\left.\begin{matrix}\alpha\le\beta\\ \gamma<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \alpha\gamma\ge\beta\gamma$.
6. Αν α>0 και β>0, τότε α+β>0,$\frac{\alpha}{\beta}>0$ και αβ>0.
   Αν α<0 και β<0, τότε α+β<0,$\frac{\alpha}{\beta}>0$ και αβ>0.
   Αν α>0 και β<0, τότε $\frac{\alpha}{\beta}<0$ και αβ<0.
7. Για κάθε αριθμό α, ισχύει $α^2$≥0.
   Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής, είναι η ισοδυναμία $α^2+β^2=0$ ⇔ α=β=0 και η ισοδυναμία $α^2+β^2≠0$ ⇔ α≠0 ή β≠0.
8. Μπορούμε να προσθέσουμε ή να διαγράψουμε από τα μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό. Πχ α+γ<β+γ ⇔ α<β.
9. Για θετικούς αριθμούς α , β ισχύει:
   $\left.\begin{matrix}\alpha\le\beta\\ \gamma\le\delta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \alpha\gamma\le\beta\delta$
10. Για θετικούς αριθμούς α , β και ν φυσικό ισχύει α=β ⇔ $α^ν=β^ν$ και α>β ⇔ $α^ν>β^ν$.
11. Εάν α, β ομόσημοι, τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$.
    Εάν α, β ετερόσημοι, τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$.

## ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$
2. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
3. $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$
4. $\alpha^3\pm\beta^3=(\alpha\pm\beta)(\alpha^2\mp\alpha\beta+\beta^2)$
5. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
6. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
7. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
8. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
9. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
10. $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\beta^{\nu-1})$, όπου $\nu\in N$, ν= περιττός
11. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\beta^{\nu-1})$, $\nu\in N$.
12. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=$
    $=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$.
13. $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
14. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$

## ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

$$|\alpha| \overset{o\rho}{=} \begin{cases}\alpha, & \text{αν } \alpha\geq 0\\ -\alpha, & \text{αν } \alpha<0\end{cases}.$$

### Ιδιότητες

i) $|\alpha|\geq 0$

ii) $|\alpha|\geq \alpha$ και $|\alpha|\geq -\alpha$

iii) $|\alpha|^2=\alpha^2$

iv) Εάν θ>0, τότε:
$|x|=\theta \Leftrightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$

v) $|x|=|\theta| \Leftrightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$

vi) Εάν θ>0, τότε:
$|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$
και $|x|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta$

vii) Εάν θ>0, τότε:
$|x|>\theta \Leftrightarrow x>\theta$ ή $x<-\theta$
και $|x|\geq\theta \Leftrightarrow x\geq\theta$ ή $x\leq-\theta$

viii) $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ και $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

ix) $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$. Το ίσον ισχύει όταν τα α και β είναι ομόσημα, ή ένας εκ των α, β είναι μηδέν.

x) $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$

## ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εάν α≥0, x≥0 και ν θετικός φυσικός αριθμός, τότε $\sqrt{\alpha}=x \overset{o\rho}{\Leftrightarrow} x^2=\alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha}=x \overset{o\rho}{\Leftrightarrow} x^\nu=\alpha$.

### Ιδιότητες

i. $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ με α, β≥0

ii. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ με α≥0, β>0

iii. $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$, α∈R

iv. $(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$, α≥0

v. $\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$, με α,β≥0.

vi. $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$, με α≥0, β>0.

vii. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$, α∈R

viii. $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha$, α≥0

ix. $\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\nu\rho}}=\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$, α≥0

x. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$,

xi. $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, α≥0

## ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΩΝΥΜΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $x^\nu=\alpha$

| ν=άρτιος | | ν=περιττός | |
|---|---|---|---|
| α>0 | α<0 | α>0 | α<0 |
| $x=\pm\sqrt[\nu]{\alpha}$ | αδύνατη | $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$ | $x=-\sqrt[\nu]{-\alpha}$ |

## ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$: δυο ρίζες άνισες $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

$\Delta=0$: δυο ρίζες ίσες $x_0=\frac{-\beta}{2\alpha}$

$\Delta<0$: αδύνατη

Έστω $x_1$, $x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

| | |
|---|---|
| Άθροισμα ριζών | $S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}$ |
| Γινόμενο ριζών | $P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ |

**Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ γίνεται $x^2-Sx+P=0$.**

### Παραγοντοποίηση τριωνύμου

| | |
|---|---|
| Δ>0 | $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$ |
| Δ=0 | $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$ |
| Δ<0 | δεν παραγοντοποιείται |

### Πρόσημο τριωνύμου:

• Αν Δ>0 και $x_1$, $x_2$ οι ρίζες, με $x_1<x_2$, τότε:

| **x** | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$** | | **ομόσημο του α** | 0 | **ετερόσημο του α** | 0 | **ομόσημο του α** | |

• Αν Δ=0 και $x_0$ η διπλή ρίζα, τότε:

| **x** | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$** | | **ομόσημο του α** | 0 | **ομόσημο του α** | |

• Αν Δ<0 δεν έχουμε ρίζες και:

| **x** | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| **$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$** | | **ομόσημο του α** | |

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Μονότονη συνάρτηση

• Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ, εάν για κάθε $x_1$, $x_2\in\Delta$, ισχύει $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

• Μια συνάρτηση f λέγεται **αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ, εάν για κάθε $x_1$, $x_2\in\Delta$, ισχύει $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$.

• Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ, εάν για κάθε $x_1$, $x_2\in\Delta$, ισχύει $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

• Μια συνάρτηση f λέγεται **φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ, εάν για κάθε $x_1$, $x_2\in\Delta$, ισχύει $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$.

### Άρτια – περιττή συνάρτηση

• Μια συνάρτηση $f:\Delta\to R$ λέγεται **άρτια**, εάν το πεδίο ορισμού της Δ είναι συμμετρικό ως προς το 0 και για κάθε $x\in\Delta$, ισχύει $f(-x)=f(x)$.

Οι άρτιες συναρτήσεις έχουν **άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄Oy**.

• Μια συνάρτηση f:Δ→R λέγεται **περιττή**, εάν το πεδίο ορισμού της Δ είναι συμμετρικό ως προς το 0 και για κάθε $x \in \Delta$, ισχύει f(-x)=-f(x).

Οι περιττές συναρτήσεις έχουν **κέντρο συμμετρίας το O(0,0)**.

## Ακρότατα συνάρτησης

•Μια συνάρτηση f:Δ→R **παρουσιάζει** (ολικό) **μέγιστο** στο $x_0 \in \Delta$, εάν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$.

•Μια συνάρτηση f:Δ→R **παρουσιάζει** (ολικό) **ελάχιστο** στο $x_0 \in \Delta$, εάν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$.

## Συνάρτηση «1-1»

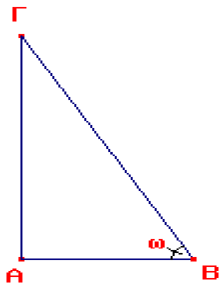
• Μια συνάρτηση f:Δ→R λέγεται **«1-1»**, εάν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, ισχύει:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$.

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

## Τριγ/κοί αριθμοί οξείας γωνίας




$$\eta\mu\omega=\frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu.\kappa\acute{\alpha}\theta.\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\pi\rho o\sigma\kappa.\kappa\acute{\alpha}\theta.\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}=\frac{AB}{B\Gamma}.$$

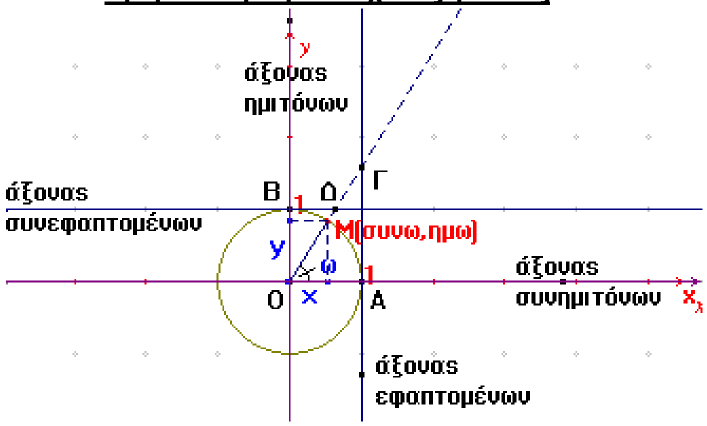
$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu.\kappa\acute{\alpha}\theta.\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\pi\rho o\sigma\kappa.\kappa\acute{\alpha}\theta.\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}=\frac{A\Gamma}{BA}.$$

$$\sigma\varphi\omega=\frac{\pi\rho o\sigma\kappa.\kappa\acute{\alpha}\theta.\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu.\kappa\acute{\alpha}\theta.\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

## Τριγωνομετρικός κύκλος

Λέγεται ο μοναδιαίος κύκλος $x^2+y^2=1$.

## Τριγ/κοί αριθμοί τυχαίας γωνίας




ημω=y  συνω=x  εφω=y/x=ΑΓ  σφω=x/y=ΒΔ

## Πρόσημο τριγ/κών αριθμών

| συνάρτηση | τεταρτημόριο | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| ημ | + | + | - | - |
| συν | + | - | - | + |
| εφ | + | - | + | - |
| σφ | + | - | + | - |

## Τριγ/κοί αριθμοί ορισμένων γωνιών

| Μοίρες ακτίνια | ημ | συν | εφ | σφ |
|---|---|---|---|---|
| $0^0$ 0 rad | 0 | 1 | 0 | δεν ορίζεται |
| $30^0$ π/6 rad | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $45^0$ π/4 rad | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| $60^0$ π/3 rad | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $90^0$ π/2 rad | 1 | 0 | δεν ορίζεται | 0 |
| $180^0$ π rad | 0 | -1 | 0 | δεν ορίζεται |
| $270^0$ 3π/2 rad | -1 | 0 | δεν ορίζεται | 0 |
| $360^0$ 2π rad | 0 | 1 | 0 | δεν ορίζεται |

## Τριγωνομετρικές σχέσεις

1. $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$.
2. ημ(2κπ+x)=ημx, $\kappa \in Z$, ή ημ($\kappa \cdot 360^0$+x)=ημx.
3. συν(2κπ+x)=συνx, $\kappa \in Z$, ή συν($\kappa \cdot 360^0$+x)=συνx.
4. εφ(2κπ+x)=εφx, $\kappa \in Z$, ή εφ($\kappa \cdot 360^0$+x)=εφx.
5. σφ(2κπ+x)=σφx, $\kappa \in Z$, ή σφ($\kappa \cdot 360^0$+x)=σφx.

## Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$,
   $\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$,
   $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\eta\mu^2\alpha$
2. $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, $\sigma\varphi\alpha=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$
3. $\varepsilon\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\alpha=1$, $\sigma\varphi\alpha=\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}$, $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}$
4. $\eta\mu^2\alpha=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

## Μετατροπή στο 1° τεταρτημόριο

| Μοίρες ακτίνια | ημ | συν | εφ | σφ |
|---|---|---|---|---|
| -ω | -ημω | συνω | -εφω | -σφω |
| $90^0$-ω π/2-ω rad | συνω | ημω | σφω | εφω |
| $90^0$+ω π/2+ω rad | συνω | -ημω | -σφω | -εφω |
| $180^0$-ω π-ω rad | ημω | -συνω | -εφω | -σφω |
| $180^0$+ω π+ω rad | -ημω | -συνω | εφω | σφω |
| $270^0$-ω 3π/2-ω rad | -συνω | -ημω | σφω | εφω |
| $270^0$+ω 3π/2+ω rad | -συνω | ημω | -σφω | -εφω |

*μνημονικός κανόνας*:

- π,3π,5π,… τότε: ημ → ημ

  συν → συν

  εφ → εφ

  σφ → σφ

  2π,4π,6π,… τότε παραλείπουμε απλά το 2π,4π,6π,…

  π/2,3π/2,5π/2,… τότε: ημ → συν

  συν → ημ

  εφ → σφ

  σφ → εφ

- βάζουμε πρόσημο το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού που αντιστοιχεί στο τεταρτημόριο του τόξου μας.

**Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις**

$$1)\ \eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in Z$$

$$2)\ \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in Z$$

3) εφx=εφθ ⇔ x=κπ+θ, κ∈Z.

4) σφx=σφθ ⇔ x=κπ+θ, κ∈Z.

**Τριγ/κοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς τόξων**

1) ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ.
2) ημ(α-β)=ημασυνβ-συναημβ.
3) συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ.
4) συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ.
5) $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$.
6) $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$.

**Τύποι του 2α συναρτήσει του α**

1) ημ2α=2ημασυνα.
2) συν2α =συν$^2$α-ημ$^2$α

   συν2α =2συν$^2$α-1

   συν2α =1-2ημ$^2$α.
3) εφ2α=$\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

**Τύποι του α συναρτήσει του $\frac{\alpha}{2}$**

1) ημα=2ημ$\frac{\alpha}{2}$συν$\frac{\alpha}{2}$.
2) συνα =συν$^2\frac{\alpha}{2}$-ημ$^2\frac{\alpha}{2}$

   συνα =2συν$^2\frac{\alpha}{2}$-1

   συνα =1-2ημ$^2\frac{\alpha}{2}$.
3) $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$.

**Τύποι του 2α συναρτήσει της εφα**

1) ημ2α=$\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$.
2) συν2α =$\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$.
3) εφ2α=$\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$.
4) σφ2α=$\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\varepsilon\varphi\alpha}$.

**Τύποι του α συναρτήσει της εφ$\frac{\alpha}{2}$**

1) ημα=$\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$.
2) συνα =$\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$.
3) εφα=$\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$.
4) σφα=$\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}$.

**Τύποι αποτετραγωνισμού**

1) $\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ και $\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$.
2) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$
3) $\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$ $\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$

## ΠΡΟΟΔΟΙ

**Αριθμητική πρόοδος(α.π.)**

| | |
|---|---|
| Ορισμός α.π. | $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega$ |
| Γενικός όρος α.π. | $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ |
| Ικανή & αναγκαία συνθήκη ώστε οι α,β,γ να είναι διαδοχικοί όροι α.π. | 2β=α+γ |
| άθροισμα των ν πρώτων όρων α.π. | $\Sigma_\nu = \frac{[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]\nu}{2}$ <br> $\Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\nu}{2}$ |

**Γεωμετρική πρόοδος(γ.π.)**

| | |
|---|---|
| Ορισμός γ.π. | $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\lambda$ |
| Γενικός όρος γ.π. | $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$ |
| Ικανή & αναγκαία συνθήκη ώστε οι α,β,γ να είναι διαδοχικοί όροι γ.π. | $\beta^2=\alpha\gamma$ |
| άθροισμα των ν πρώτων όρων γ.π. | $\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}$. |

## ΟΡΙΣΜΟΙ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

| ΟΡΙΣΜΟΙ | ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ |
|---|---|
| $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$ <br> $\alpha^0=1$ <br> $\alpha^1=\alpha$ <br> $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ <br> $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ <br> $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ | $\alpha^\mu\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$ <br> $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ <br> $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}$ <br> $(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu$ <br> $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$ |

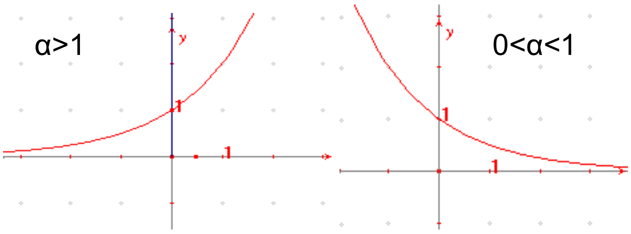
## ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

**f(x)=$\alpha^x$, 0<α≠1.**

*Πεδίο ορισμού*: R.

*Πεδίο τιμών*: $R_+^*$.

*Γραφική παράσταση*:




*Μονοτονία*: • όταν α>1 είναι ↗ στο R:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow α^{x_1}<α^{x_2}$.

• όταν 0<α<1 είναι ↘ στο R:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow α^{x_1}>α^{x_2}$.

*«1-1»*: $α^{x_1}=α^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$.

## ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

### Ορισμοί

$0<α\neq1,\ θ>0$: $\log_α θ = x \Leftrightarrow$ **$α^x=θ$**

*δεκαδικός λογάριθμος*: $\log θ = x \Leftrightarrow$ **$10^x=θ$**

*Νεπέρειος ή φυσικός λογάριθμος*: $\ln θ = x \Leftrightarrow$ **$e^x=θ$**

όπου e= $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}718$.

### Ιδιότητες

| | |
|---|---|
| $\log_α 1 = 0$<br>$\log 1 = 0$<br>$\ln 1 = 0$ | $\log_α α = 1$<br>$\log 10 = 1$<br>$\ln e = 1$ |
| $\log_α α^x = x$<br>$\log 10^x = x$<br>$\ln e^x = x$ | $α^{\log_α x} = x$<br>$10^{\log x} = x$<br>$e^{\ln x} = x$ |
| $\log_α θ_1 + \log_α θ_2 = \log_α(θ_1θ_2)$<br>$\log θ_1 + \log θ_2 = \log(θ_1θ_2)$<br>$\ln θ_1 + \ln θ_2 = \ln(θ_1θ_2)$ | |
| $\log θ_1 - \log θ_2 = \log\frac{θ_1}{θ_2}$<br>$\log_α θ_1 - \log_α θ_2 = \log_α\frac{θ_1}{θ_2}$ | $\ln θ_1 - \ln θ_2 = \ln\frac{θ_1}{θ_2}$ |
| $\log θ^κ = κ\cdot\log θ$<br>$\log_α θ^κ = κ\cdot\log_α θ$ | $\ln θ^κ = κ\cdot\ln θ$ |
| $\log_α \sqrt[ν]{θ^κ} = \frac{κ}{ν}\cdot\log_α θ$<br>$\log \sqrt[ν]{θ^κ} = \frac{κ}{ν}\cdot\log θ$<br>$\ln \sqrt[ν]{θ^κ} = \frac{κ}{ν}\cdot\ln θ$ | |
| **Τύπος αλλαγής βάσης**<br>$\log_α θ = \frac{\log_β θ}{\log_β α}$<br>$\log_α θ = \frac{\log θ}{\log α}$<br>$\log_α θ = \frac{\ln θ}{\ln α}$ | **Άλλες ιδιότητες**<br>$\log_α β = \frac{1}{\log_β α}$<br>$\log_α\frac{1}{β} = -\log_α β$<br>$\log_{\frac{1}{α}} β = -\log_α β$ |

## ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

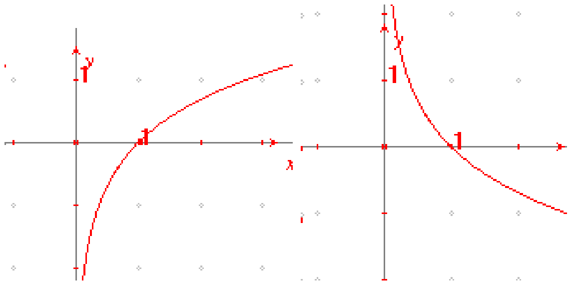
## $f(x)=\log_α x,\ 0<α\neq1$.

*Πεδίο ορισμού*:. $R_+^*$

*Πεδίο τιμών*: R.

*Γραφική παράσταση*:

α>1 0<α<1



*Μονοτονία*:

• όταν α>1 είναι ↗ στο R, δηλαδή αν

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_α x_1<\log_α x_2$.

• όταν 0<α<1 είναι ↘ στο R, δηλαδή αν

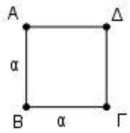
$x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_α x_1>\log_α x_2$.

*«1-1»*: $\log_α x_1=\log_α x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$.

## ΤΥΠΟΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

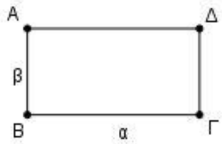
### ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

1. Τετράγωνο:




**Ε=$α^2$β και Π=4α.**

2. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο:




**Ε=αβ και Π=2α+2β.**

3. Τύποι εμβαδού τριγώνου:

$E = \frac{1}{2}α\cdot υ_α = \frac{1}{2}β\cdot υ_β = \frac{1}{2}γ\cdot υ_γ$.

Ε=$\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, τύπος Ήρωνα

Ε=τρ

Ε=$\frac{αβγ}{4R}$

$E = \frac{1}{2}αβημΓ = \frac{1}{2}αγημΒ = \frac{1}{2}βγημΑ$.

όπου ρ=ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου

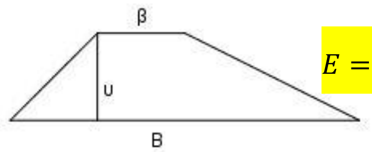
R=ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου

$τ = \frac{α+β+γ}{2}$= ημιπερίμετρος.

4. Εμβαδόν, περίμετρος και ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α:

$υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$, Ε= $\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$ και Π=3α.

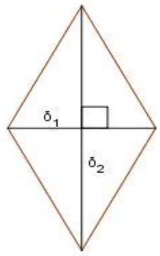
5. Εμβαδόν τραπεζίου:




$E = \frac{(B+β)υ}{2}$

**6.** Εμβαδόν ρόμβου:

$E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$ .

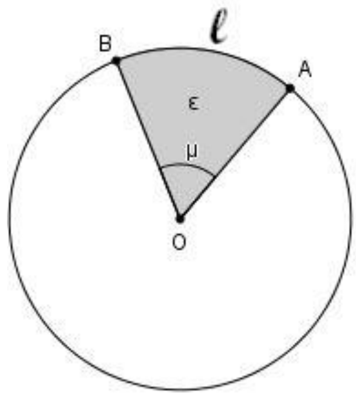



**7.** Μήκος (L) και εμβαδόν (E) κύκλου ακτίνας ρ:

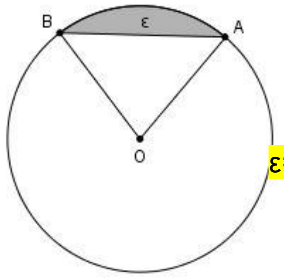
$L=2\pi\rho$, $E=\pi\rho^2$

**8.** Μήκος ($\ell$) τόξου $\mu^0$ και εμβαδόν (O, $\overset{\frown}{AB}$) κυκλικού τομέα $\mu^0$:

$\ell=\frac{\pi\rho\mu}{180}$ και $\varepsilon=(O, \overset{\frown}{AB})=\frac{\pi\rho^2\mu}{360}$

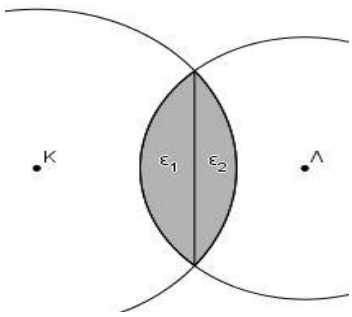



**9.** Εμβαδόν (ε) κυκλικού τμήματος:




$\varepsilon=(O, \overset{\frown}{AB})-(OAB)$

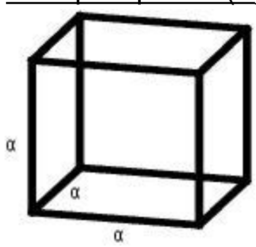
**10.** Εμβαδόν (ε) κυκλικού μηνίσκου:




$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$

## ΟΓΚΟΙ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ

**1.** Ολική επιφάνεια ($E_{ολ}$) και όγκος (V) κύβου:



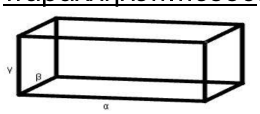

Ολική επιφάνεια:

$E_{ολ}=6\alpha^2$

Όγκος:

$V=\alpha^3$

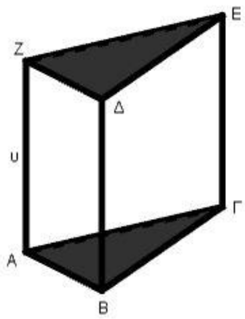
**2.** Ολική επιφάνεια και όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου:



Ολική επιφάνεια: $E_{ολ}=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

Όγκος: $V=\alpha\beta\gamma$

**3.** Ορθό πρίσμα:




Ολική επιφάνεια:

$E_{ολ}=E_\pi+2\cdot E_\beta$

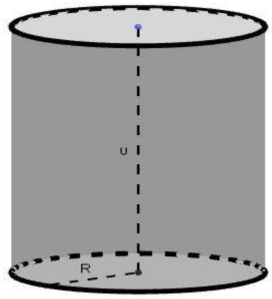
Όγκος:

$V=E_\beta\cdot υ$

$E_\pi$= εμβαδόν παρά-πλευρης επιφά-νειας.

$E_\beta$= εμβαδόν βάσης.

**4.** Κύλινδρος:




$E_\pi = 2\pi\rho υ$

$E_\beta = \pi\rho^2$

Ολική επιφάνεια:

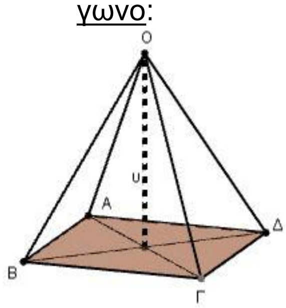
$E_{ολ} =E_\pi+2\cdot E_\beta$

$=2\pi\rho υ+2\pi\rho^2$

Όγκος:

$V=E_\beta\cdot υ=\pi\rho^2 υ$

**5.** Ορθή πυραμίδα με βάση κανονικό πολύγωνο:



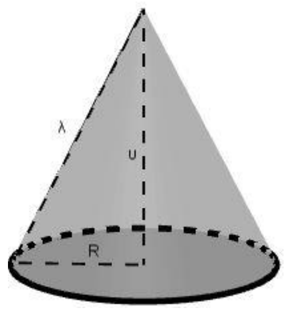

Ολική επιφάνεια:

$E_{ολ}=E_\pi+E_\beta$

Όγκος:

$V=\frac{1}{3}E_\beta\cdot υ$

**6.** Κώνος:




$E_\pi = \pi\rho\lambda$

$E_\beta = \pi\rho^2$

Ολική επιφάνεια:

$E_{ολ} =E_\pi+E_\beta$

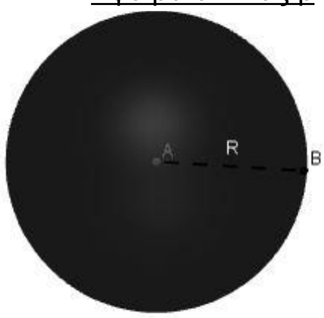
$=\pi\rho\lambda+\pi\rho^2$

Όγκος:

$V=\frac{1}{3}E_\beta\cdot υ=\frac{1}{3}\pi\rho^2 υ$

λ= γενέτειρα κώνου.

**7.** Σφαίρα ακτίνας ρ:




Επιφάνεια σφαίρας:

$E_{σφ}=4\pi\rho^2$

Όγκος σφαίρας:

$V_{σφ}=\frac{4}{3}\pi\rho^3$

## ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΑΚΤΙΝΑΣ R:

1. Κεντρική γωνία $\omega_\nu=\frac{360^0}{\nu}$
2. Γωνία ν-γώνου: $\varphi_\nu=180^0-\omega_\nu$
3. $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$
4. Περίμετρος ν-γώνου: $P_\nu=\nu\cdot\lambda_\nu$

5. Εμβαδόν ν-γώνου: $E_ν=\frac{1}{2}P_ν \cdot α_ν$
6. $λ_3=R\sqrt{3}$, $α_3=\frac{R}{2}$ και $E_3=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
7. $λ_4=R\sqrt{2}$, $α_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ και $E_4=2R^2$
8. $λ_6=R$, $α_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ και $E_6=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

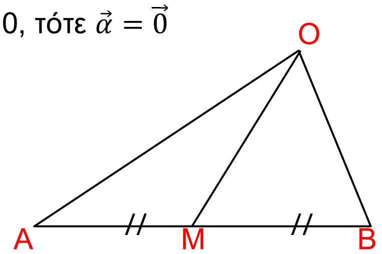
## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

*Διάνυσμα θέσης*: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,όπου Ο τυχαίο σημείο αναφοράς.

*Παράλληλα διανύσματα*: $\vec{α}//\vec{β} \Leftrightarrow \vec{α} = λ\vec{β}, λ \in R$.

- αν λ > 0, τότε $\vec{α} \uparrow\uparrow \vec{β}$
- αν λ < 0, τότε $\vec{α} \uparrow\downarrow \vec{β}$
- αν λ = 0, τότε $\vec{α} = \vec{0}$

*Διανυσματική ακτίνα μέσου*: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$




*Συντεταγμένες μέσου Μ τμήματος ΑΒ με Α($x_A$,$y_A$) και Β($x_B$,$y_B$)*: $\begin{cases} x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$

*Μέτρο διανύσματος* $\vec{α} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$: $|\vec{α}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

*Μέτρο διανύσματος* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

*Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος* $\vec{α} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, *x ≠ 0:* λ=y/x

*Συνθήκη παραλληλίας των διανυσμάτων* $\vec{α} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$*και* $\vec{β} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$*:*

$$\vec{α}//\vec{β} \Leftrightarrow \det(\vec{α},\vec{β}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

*Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων*: $\vec{α} \cdot \vec{β} = |\vec{α}| \cdot |\vec{β}| \cdot συνφ$, όπου φ η γωνία των δυο διανυσμάτων.

- $\vec{α} \cdot \vec{β} = |\vec{α}| \cdot |\vec{β}| \Leftrightarrow \vec{α} \uparrow\uparrow \vec{β}$
- $\vec{α} \cdot \vec{β} = -|\vec{α}| \cdot |\vec{β}| \Leftrightarrow \vec{α} \uparrow\downarrow \vec{β}$
- $\vec{α} \cdot \vec{β} > 0 \Leftrightarrow 0^0<φ<90^0$
- $\vec{α} \cdot \vec{β} < 0 \Leftrightarrow 90^0<φ<180^0$
- $\vec{α} \cdot \vec{β} = 0 \Leftrightarrow \vec{α} = \vec{0}$ ή $\vec{β} = \vec{0}$ ή $\vec{α} \perp \vec{β}$

*αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου*: $\vec{α} \cdot \vec{β} = x_1x_2 + y_1y_2$

όπου $\vec{α} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$*και* $\vec{β} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$.

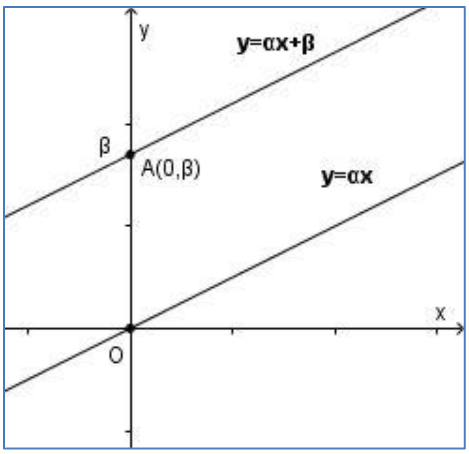
*γωνία διανυσμάτων*: $συνφ = \frac{\vec{α}\cdot\vec{β}}{|\vec{α}|\cdot|\vec{β}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

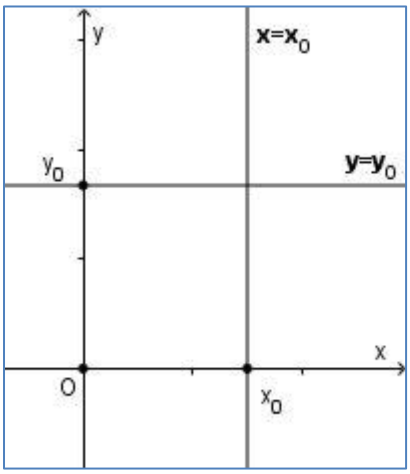
*Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από σημείο Α($x_o$,$y_o$) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ* :

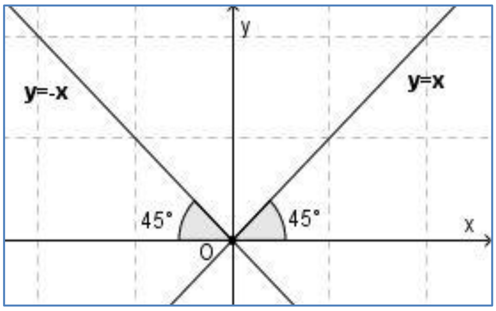
**$y-y_o=λ(x-x_o)$.**

*Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας ΑΒ με Α($x_A$,$y_A$) και Β($x_B$,$y_B$)* : $λ = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$,μόνο αν $x_A \neq x_B$.

Ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης ευθείας:




*Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας (ε)* : **Αx+Βy+Γ=0**, με **Α ≠ 0** ή μόνο **Β ≠ 0**.

- $λ = -\frac{A}{B}$, **Β ≠ 0**.
- **(ε) // $\vec{α}$=(Β,-Α) ή (-Β,Α)**
- **(ε) ⊥ $\vec{α}$=(Α,Β) ή (-Α,-Β)**.

*Συνθήκη παραλληλίας ευθειών*: **($ε_1$) // ($ε_2$) ⇔ $λ_1=λ_2$.**

*Συνθήκη καθετότητας ευθειών*: **($ε_1$) ⊥ ($ε_2$) ⇔ $λ_1λ_2=-1$.**

Απόσταση σημείου **$M_o(x_o,y_o)$** από ευθεία **(ε): Αx+By+Γ=0** :

$$d(M_o, ε) = \frac{|Ax_o + By_o + Γ|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

*Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ*: **(ΑΒΓ)=**$\frac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|$.

## 1. Κύκλος:

Εξίσωση κύκλου κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ (Σχ. 1) : **$x^2+y^2=\rho^2$**.

*Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο του $M_1(x_1,y_1)$* : **(ε): $xx_1+yy_1=\rho^2$**.

Εξίσωση κύκλου κέντρου $K(x_o,y_o)$ και ακτίνας ρ (Σχ. 2):

**$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$**.

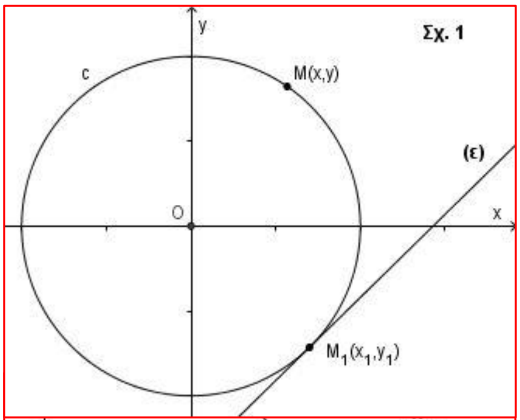
*Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο του $M_1(x_1,y_1)$* :

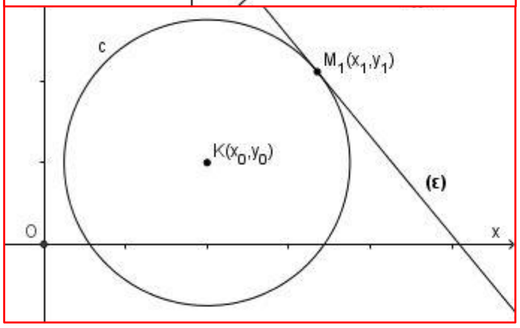
**(ε): $(x-x_o)(x_1-x_o)+(y-y_o)(y_1-y_o)=\rho^2$**.

Γενική μορφή εξίσωσης κύκλου:

**$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A^2+B^2-4\Gamma>0$**.

Κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.




## 2. Παραβολή :

*Σχήμα 3 και σχήμα 4*: Ορισμός: $|\overrightarrow{M\Delta}|=|\overrightarrow{ME}|$

Εστία: $E\left(\frac{\rho}{2},0\right)$ .

Διευθετούσα: **(δ):** $x=-\frac{\rho}{2}$.

*Εξίσωση*: **$y^2=2\rho x$** .

*Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο* της $M_1(x_1,y_1)$:

**(ε): $yy_1=\rho(x+x_1)$** .

*Σχήμα 5 και σχήμα 6*: Ορισμός: $|\overrightarrow{M\Delta}|=|\overrightarrow{ME}|$

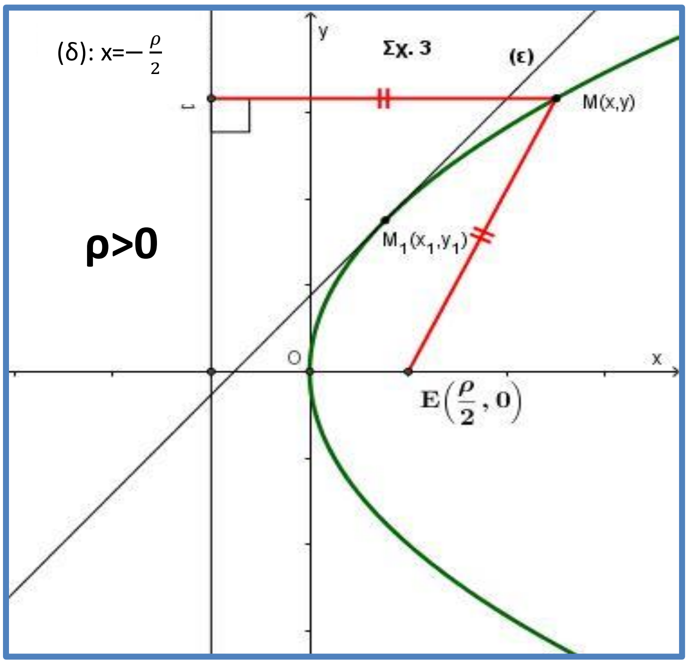
Εστία: $E\left(0,\frac{\rho}{2}\right)$ .

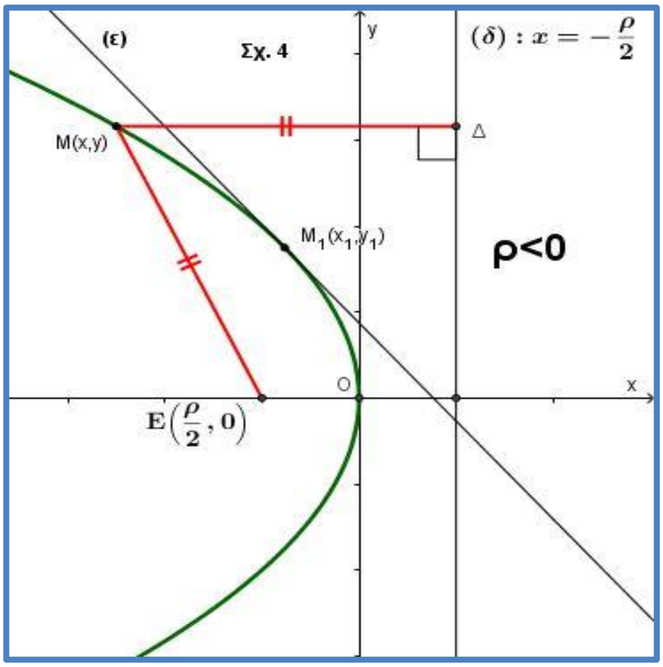
Διευθετούσα: **(δ):** $y=-\frac{\rho}{2}$.

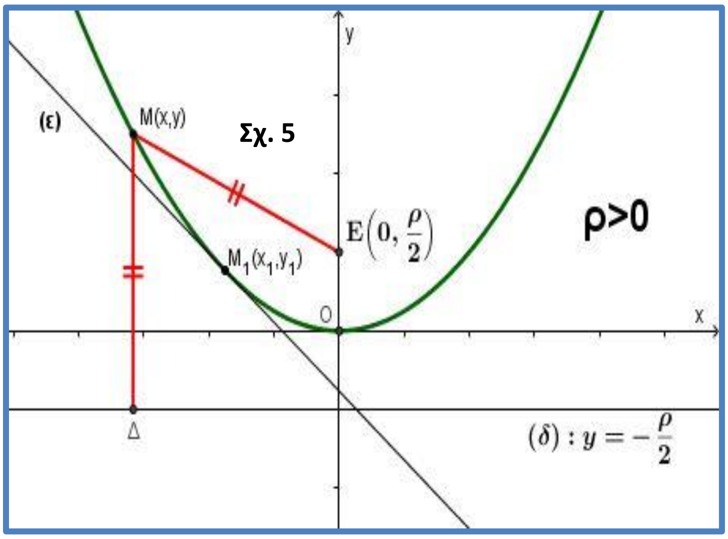
*Εξίσωση*: **$x^2=2\rho y$** .

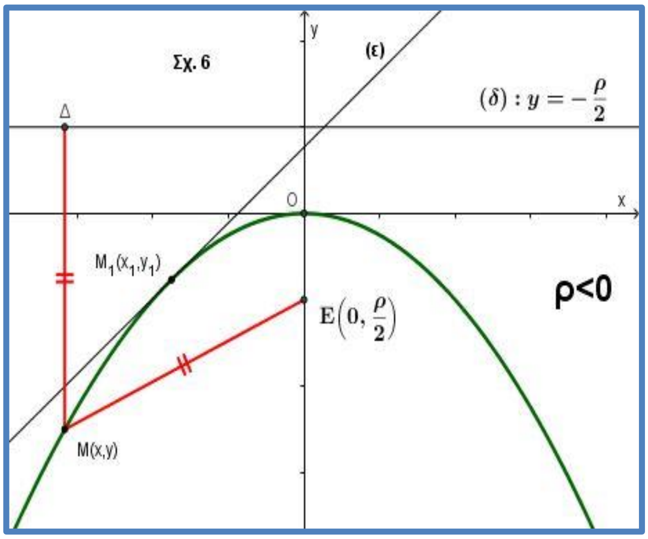
*Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο* της $M_1(x_1,y_1)$:

**(ε): $xx_1=\rho(y+y_1)$** .






### 3. **Έλλειψη:**

*Σχήμα 7*:

*Ορισμός* : $|\vec{ME}| + |\vec{ME'}| = 2\alpha$,

*Εστίες*: **Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0)**

όπου **α, γ** σταθεροί πραγματικοί με **α > γ**.

*Εξίσωση*: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,

όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} < \alpha$.

*Εξίσωση εφαπτομένης*: **(ε):** $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

όπου $M_1(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής.

*Εκκεντρότητα*: **ε = γ/α < 1**.

*Σχήμα 8*:

*Ορισμός* : $|\vec{ME}| + |\vec{ME'}| = 2\alpha$,

*Εστίες*: **Ε(0,γ) και Ε΄(0,-γ)**

όπου **α, γ** σταθεροί πραγματικοί με **α > γ**.

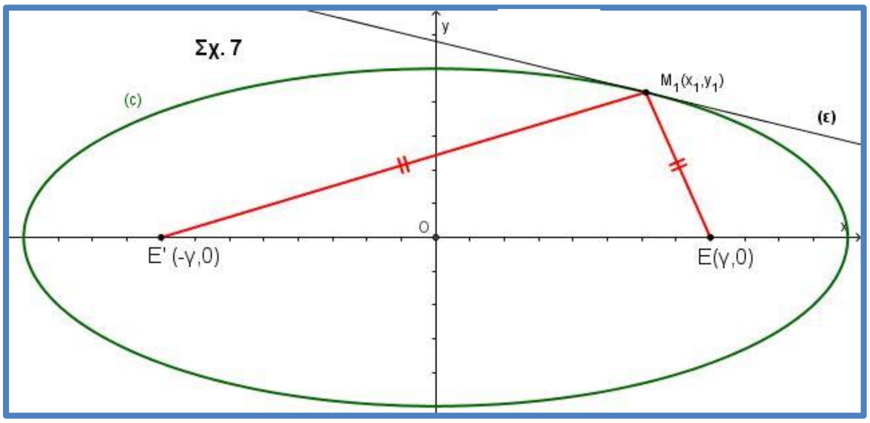
*Εξίσωση*: $\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$,

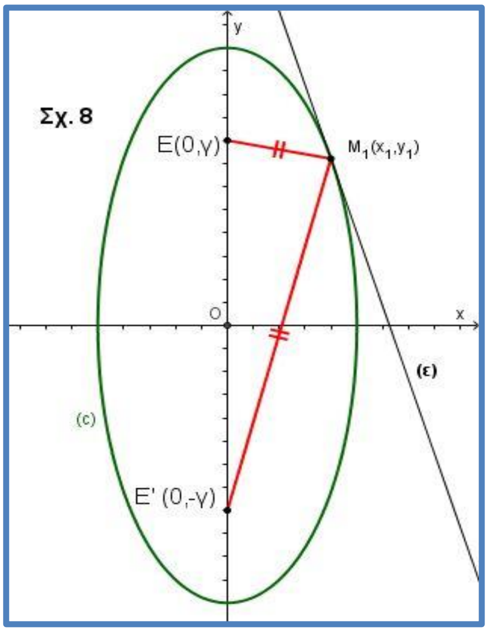
όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} < \alpha$.

*Εξίσωση εφαπτομένης*: **(ε):** $\frac{yy_1}{\alpha^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$.

όπου $M_1(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής.

*Εκκεντρότητα*: **ε = γ/α < 1**.



## 4. Υπερβολή:

*Σχήμα 9:*

*Ορισμός*: $\left| |\overrightarrow{ME}| - |\overrightarrow{ME'}| \right| = 2\alpha$ .

*Εστίες*: **Ε(γ,0)** και **Ε΄(-γ,0)**

όπου **α, γ** σταθεροί πραγματικοί με **α < γ**.

*Εξίσωση*: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

όπου $\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\boldsymbol{\gamma^2 - \alpha^2}}$.

*Εξίσωση εφαπτομένης*: **(ε)**: $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$,

όπου $\mathbf{M_1(x_1,y_1)}$ το σημείο επαφής.

*Εκκεντρότητα*: **ε = γ/α > 1**.

*Ασύμπτωτες*: (δ΄): $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ και (δ): $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ .

*Ισοσκελής υπερβολή*: $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta: \quad x^2 - y^2 = \alpha^2 \\ \alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\varepsilon\varsigma: \quad y = \pm x \end{cases}$

*Σχήμα 10:*

*Ορισμός*: $\left| |\overrightarrow{ME}| - |\overrightarrow{ME'}| \right| = 2\alpha$ .

*Εστίες*: **Ε(0,γ)** και **Ε΄(0,-γ)**

όπου **α, γ** σταθεροί πραγματικοί με **α < γ**.

*Εξίσωση*: $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ .

όπου $\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\boldsymbol{\gamma^2 - \alpha^2}}$.

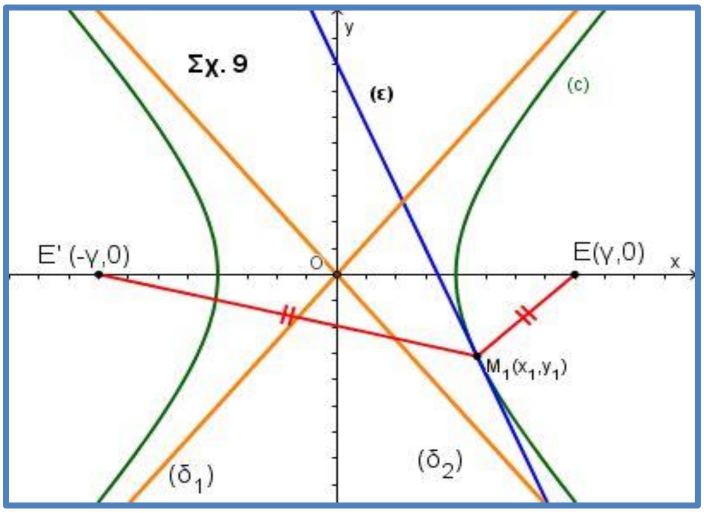
*Εξίσωση εφαπτομένης*: **(ε)**: $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$,

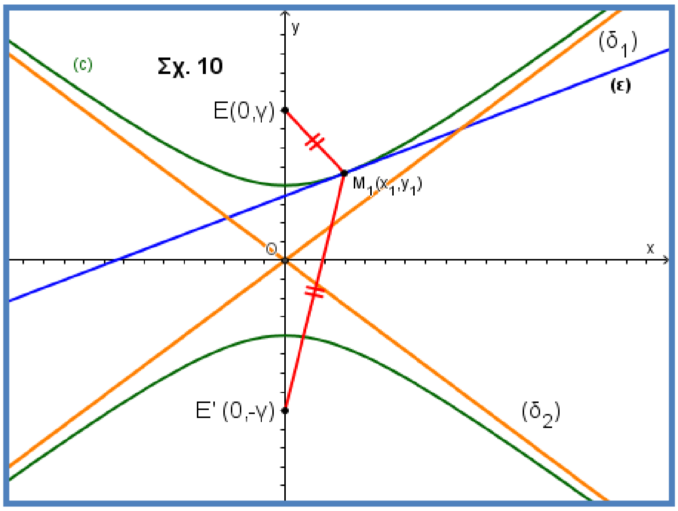
όπου $\mathbf{M_1(x_1,y_1)}$ το σημείο επαφής.

*Εκκεντρότητα*: **ε = γ/α > 1**.

*Ασύμπτωτες*: (δ΄): $x = -\frac{\beta}{\alpha}y$ και (δ): $x = \frac{\beta}{\alpha}y$ .

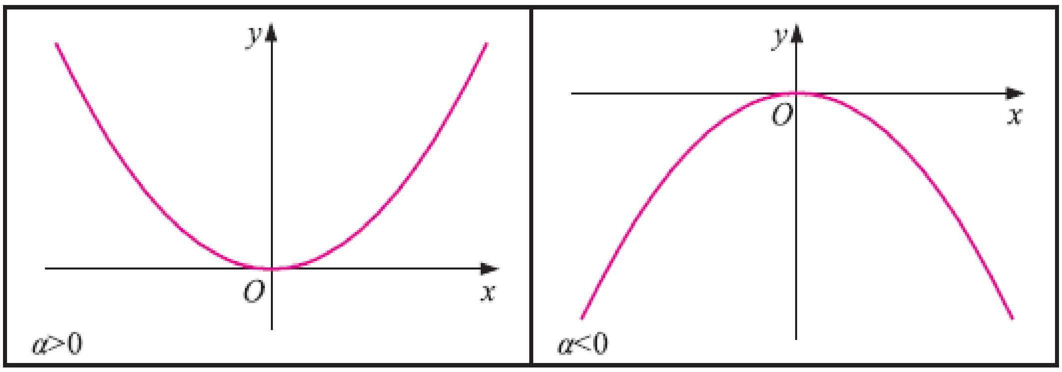
*Ισοσκελής υπερβολή*: $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta: \quad y^2 - x^2 = \alpha^2 \\ \alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\varepsilon\varsigma: \quad y = \pm x \end{cases}$



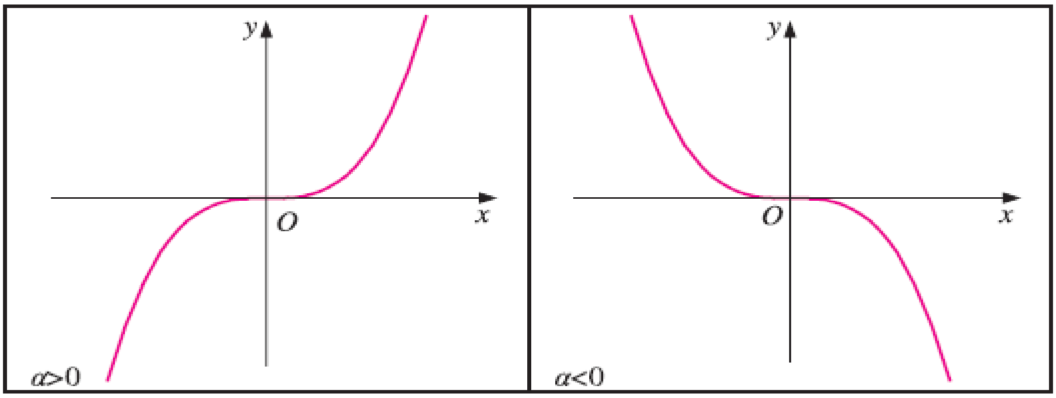




## 5. Γραφικές παραστάσεις άλλων γνωστών συναρτήσεων:

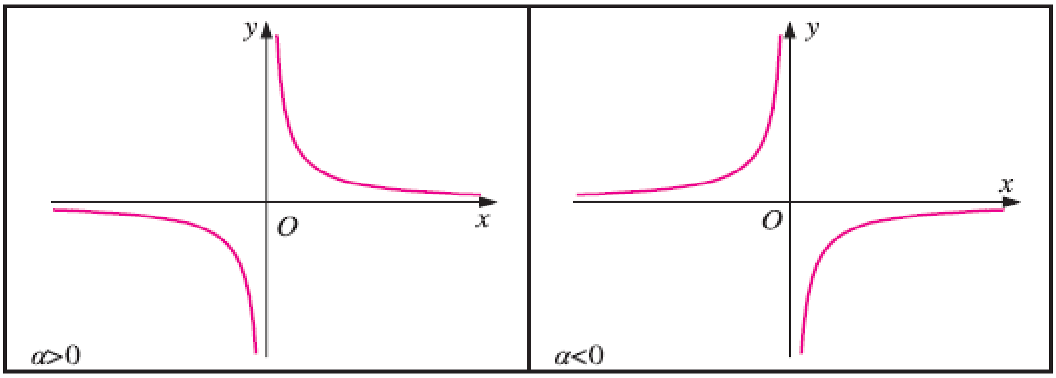
**Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2,\ \alpha \neq 0$.**



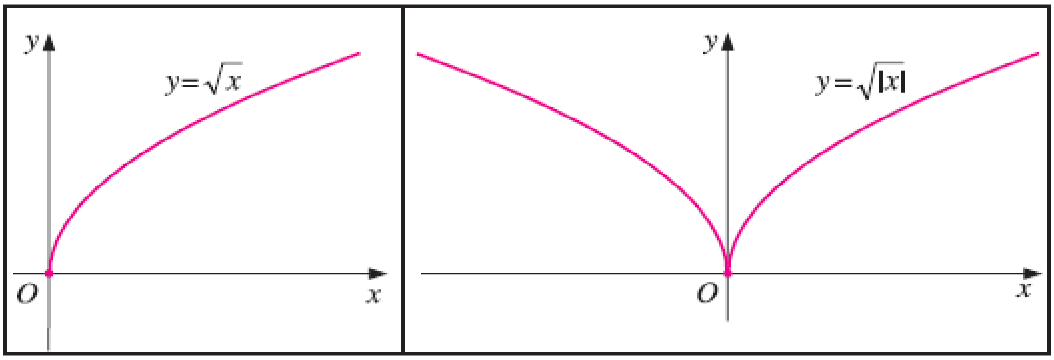
**Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3,\ \alpha \neq 0$.**



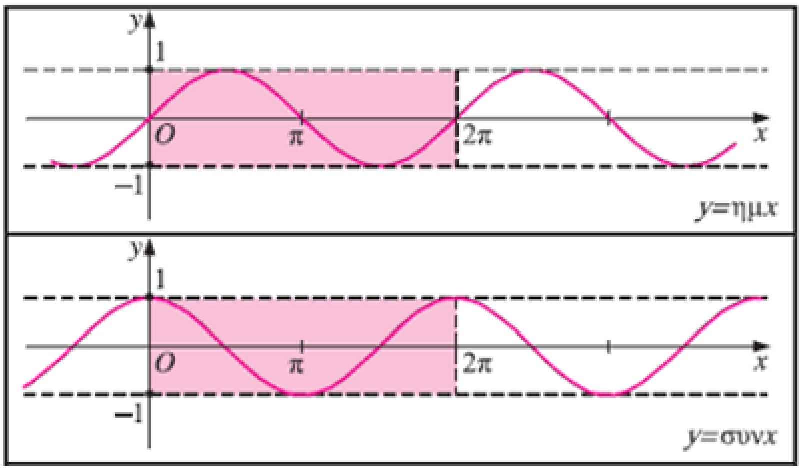

**Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha}{x},\ \alpha \neq 0$.**

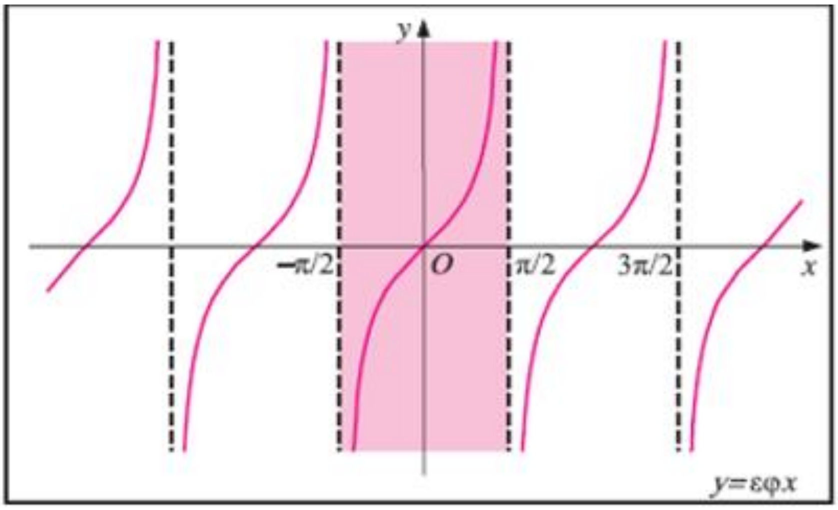



**Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \sqrt{|x|}$.**




**Οι τριγωνικές συναρτήσεις: $f(x) =$ ημ$x$, $f(x) =$ συν$x$, $f(x) =$ εφ$x$.**






Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $f(x) = συνx$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

**6.** END