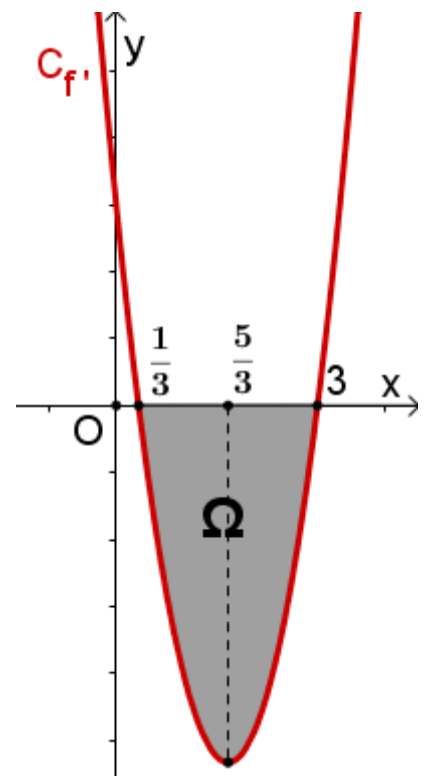


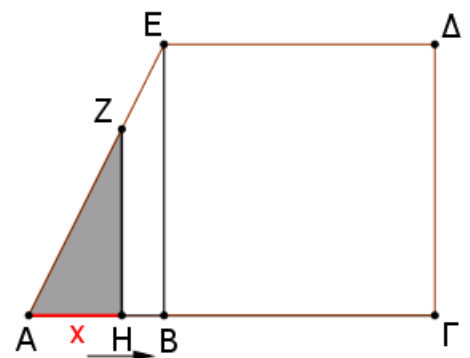
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x - \alpha \ln x$, $x>0$, με α πραγματικό αριθμό.
- Εάν $f(x) \geq 2e$, για κάθε $x>0$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α .
 - Εάν $\alpha=2e$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα. Στη συνέχεια να μελετήσετε την κυρτότητα της συνάρτησης f .
 - Εάν $\alpha=2e$, να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , καθώς και εάν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.
 - Εάν $\alpha=2e$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (1,2e)$, ισχύει $(f(x)-2e)(2e-1) < (f(2e)-2e)(x-1)$.
- 2)** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \left(\sin x - \frac{\eta \mu x}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $f(0)=1$.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} και να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\pi,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\pi)$.
 - Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται από τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης f , τον άξονα $x x'$, και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \ln(f(x)), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ότι είναι κοίλη στο $(-\pi,\pi)$.
- 3)** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου της, δίνεται στο διπλανό σχήμα. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:
- Έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .
 - $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{27}$.
 - Το εμβαδόν του χωρίου Ω στο σχήμα, είναι $E(\Omega) = \frac{256}{27}$ τετραγωνικές μονάδες.
 - $\int_0^3 f'(x) dx = -9$.
- Να δείξετε ότι $f(3) = -8$ και $f(0) = 1$.
 - Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τέμνει τον άξονα $x x'$ σε τρία σημεία, τα δυο με θετική τετμημένη και το ένα με αρνητική.



- 4)** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ και $f(x) + xf'(x) = \alpha \cdot e^{-xf(x)}$, για κάθε $x < 0$.
- Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(\alpha x)$, $x < 0$.
 - Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές $y=f(x)$, $y=\frac{\alpha}{e}$ και $x=\frac{e^2}{\alpha}$.
 - Να βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
 - Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τέμνει τον άξονα xx' σε ένα μόνο σημείο, με τετμημένη μεγαλύτερη από e/α .
- 5)** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.
 - Να δείξετε ότι:
 - $\int_{-1}^0 f(x) dx > -\frac{1}{4}$.
 - Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική θετική ρίζα.
 - $\int_0^\alpha f(x) dx + \int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x) dx = \alpha f(\alpha)$, για κάθε $\alpha > 0$.
 - Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x^2}$, $x > 0$.
 - Να δείξετε ότι η ασύμπτωτος (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ στο $+\infty$, είναι η διχοτόμος $1^{ου}-3^{ου}$ τεταρτημορίου.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την ευθεία (ε), την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, ως συνάρτηση του $f(1)$.
- 6)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x} - \eta\mu x}$.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$
 - Εάν g ο περιορισμός της f στο διάστημα $(0, \pi/2)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g έχει τοπικό μέγιστο σε σημείο $\xi \in (0, \pi/2)$.
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \alpha}{\sqrt{x} - \eta\mu x}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $h(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 1 + \sigma\upsilon\nu x$.
 - Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{x\eta\mu x}{f(x)} \right) dx$.
- 7)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} .
 - Να βρείτε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης f και της αντίστροφής της f^{-1} .

- iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της αντίστροφης f^{-1} στο $x_0=3$.
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης f^{-1} , τον άξονα x και την ευθεία $x=3$.
- 8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sin^2x$, $x \in [0, \pi/2]$.
- i. Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} .
- ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της αντίστροφης f^{-1} στο $x_0=3/4$, είναι κάθετη στην ευθεία (δ): $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+7$.
- iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι έχει ένα $\Sigma.K.$ που είναι συνευθειακό με τα σημεία A και B και ότι το $\Sigma.K.$ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- iv. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο ακριβώς σημεία της παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ): $y=-\frac{2}{\pi}x+7$.
- 9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\epsilon\phi x - 1}{2}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
- i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} .
- ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα $\Sigma.K.$ που είναι και κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- iii. Να δείξετε ότι $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$, για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$ και τους άξονες.
- 10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x + \ln x$, $x > 0$.
- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} .
- ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μοναδικό σημείο καμπής στη θέση x_0 και ότι $f'(x) \geq \frac{x_0 + 1}{x_0^2}$.
- iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0}$, $x \geq x_0$, όπου x_0 η θέση του $\Sigma.K.$ του (ii) ερωτήματος. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη στη θέση x_0 .
- iv. Να δείξετε ότι $\frac{f(x_0) + f(\alpha)}{2} > f\left(\frac{x_0 + \alpha}{2}\right)$, για κάθε $\alpha > x_0$.
- 11) Στο διπλανό σχήμα είναι $(AB)=\alpha$, $(B\Gamma)=2\alpha$ και $(\Gamma\Delta)=\beta$ με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.
- i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου εμβαδού χωρίου, συναρτήσει του $(AH)=x$, όταν το σημείο H διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AΓ, δίνεται από τη συνάρτηση:



$$E(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{2\alpha}x^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{(2x-\alpha)\beta}{2}, & \text{αν } \alpha < x \leq 3\alpha \end{cases}$$

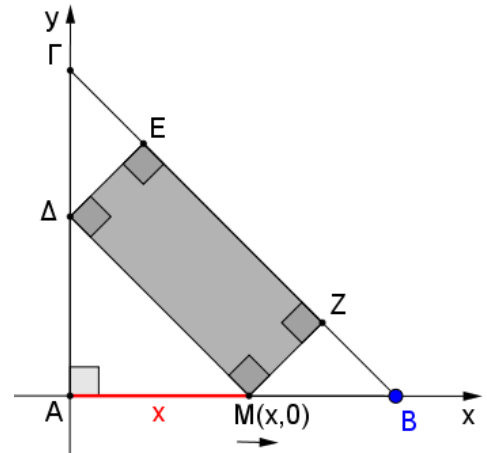
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

iii. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, έτσι ώστε η ευθεία $(\epsilon): y = x - \frac{1}{2}$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης E στο σημείο της $M\left(\frac{\alpha}{2}, E\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

Για $\alpha = \beta = 2$.

iv. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $f'(x) = E(x)$ για κάθε $x \in [0,6]$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $N(2,0)$.

12) Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με την κορυφή του A στην αρχή O , τις κάθετες πλευρές του πάνω στους θετικούς ημιάξονες και υποτείνουσα μήκους 40 μονάδες (διπλανό σχήμα).



i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ .

ii. Σημείο $M(x,0)$ διαγράφει την πλευρά AB . Με αρχή το σημείο M , εγγράφουμε στο τρίγωνο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΔEZM , με $M\Delta // B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΔEZM , δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 20x\sqrt{2} - x^2, 0 \leq x \leq 20\sqrt{2}$.

iii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο όταν το M είναι μέσον του AB και ότι δεν υπερβαίνει το μισό εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

iv. Εάν το σημείο M κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα 2 μονάδες/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , όταν το M διέρχεται από τη θέση $M(15\sqrt{2}, 0)$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x, x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και να λυθεί η εξίσωση $\ln x = \frac{x^2 - 1}{2x}$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $x^x - \frac{1}{x^x} + 2x - 2 > 2x \ln x + \frac{e^{2x-2} - 1}{e^{x-1}}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x \cdot e^{f(x) + 2\ln x}}{x^2 - 1} \right]$.

iv. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , που τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $2\ln 4 - 6$ και το σημείο επαφής έχει τετμημένη μεταξύ 0 και 1.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - 2}{x^2}$ και να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(2x) - 8}{x} = 24 \cdot f'(0)$.

- ii. Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x) - 6f(x) = x^2 - 8$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sqrt{9x^2 + 9} = 9 - 3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iv. Έστω A το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα yy' , $M(x, f(x))$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $x > 0$ και N η προβολή του M στον άξονα xh' . Εάν το M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , έτσι ώστε η τετμημένη του x να κινείται με ταχύτητα 4 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN , όταν το σημείο M βρίσκεται στη θέση $M(4\sqrt{3}, -4)$.
- 15)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 14e$. (1)
 - $f'(x) = f(x) + 2e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να δείξετε ότι $f'(1) = 7e$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
Έστω $f(x) = (2x+3)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iv. Να βρείτε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
- v. Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \geq -7/2$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, με $x \geq x_0$, και $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του σημείου M , είναι πενταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$.
- 16)** i. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iii. Εάν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- iv. Αν f είναι η συνάρτηση του (iii) ερωτήματος, να λυθεί η εξίσωση:
 $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$, όταν $x \in [0, +\infty)$.
- 17)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x$, $x > 0$.
- i) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κοιλότητα και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο τομής της με τον άξονα xh' και να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση.
- iii) Εάν $e < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\ln \alpha - 1}{\ln \beta - 1} < \frac{\beta}{\alpha}$.
- iv) Να λυθεί η εξίσωση $x \cdot e^{e/x} = e^2$.
- 18)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-\alpha)e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και α σταθερό πραγματικό θετικό αριθμό.
- i. Να βρεθεί ο αριθμός α , εάν $\int_0^\alpha f(x) dx = 3 - e^2$.

ii. Για $\alpha=2$:

1. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -e$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τα σημεία καμπής και τα σημεία τομής με τους άξονες.
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{f(x)+e^x}$.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x$, $x \in \mathbb{R}$ και α, β σταθερούς πραγματικούς αριθμούς. Δίνεται επίσης και η ευθεία (ε) : $x-2y+2=0$.

i. Εάν η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο το σημείο $A(2,1)$, να υπολογίσετε τα α και β και να βρείτε το είδος του ακρότατου.

Για $\alpha=-1/4$ και $\beta=1$:

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) δεν τέμνει την γραφική παράσταση (C_f) της συνάρτησης f . Σημείο $M(f, f(x))$ κινείται στην C_f . Να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε) ως συνάρτηση της τετμημένης x του σημείου M .

iii. Εάν $d(x)=\frac{x^2-2x+4}{2\sqrt{5}}$ η απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε) , να υπολογίσετε για ποια τιμή του x , η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη και να βρείτε το σημείο Σ της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε) . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Σ , είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) .

iv. Να δείξετε ότι όταν το σημείο M διέρχεται από το σημείο Σ , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του, είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

20) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x+1}{e^{x+1}} + \frac{e-1}{e}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x)=1 + \frac{1}{2e} - \frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}$, $x > -\sqrt{e}$.

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να εξετάσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - f(x))$.

iv. Να υπολογίσετε τα $x > -\sqrt{e}$, έτσι ώστε $\frac{x+1}{e^{x+1}} + \frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2} = \frac{3}{2e}$.

21) Για τις συναρτήσεις $\varphi: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\sigma: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν:

- $\varphi(x) - x\varphi'(x)\ln x = 0 \dots (1)$ για κάθε $x > 1$.
- $\sigma(x) + x\sigma'(x)\ln x = 0 \dots (2)$ για κάθε $x > 1$.
- $\varphi(e) = -2$ και $\sigma(e) = 2$.

i. Να δείξετε ότι $\varphi(x) = -2\ln x$ και $\sigma(x) = \frac{2}{\ln x}$, $x > 1$.

ii. Για δυο συναρτήσεις f και g ισχύουν:

- $f(x) = -xg'(x)\ln x \dots (3)$ για κάθε $x > 1$.
- $g(x) = -xf'(x)\ln x \dots (4)$ για κάθε $x > 1$.
- $f(e) = 0$ και $g(e) = 2$.

Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x} - \ln x$, $x > 1$ και $g(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln x$, $x > 1$.

iii. Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και g και τα ακρότατα της συνάρτησης g .

iv. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη της (ε) να είναι κάθετη στην ευθεία (δ) : $ex-2y+3=0$.

22) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f^2(x) - x^2 = 4 \dots (1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης f .
- ii. Εάν επιπλέον ισχύει $f(0) = -2$:
 - α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση στρέφει τα Κ.Κ. στο \mathbb{R} .
 - γ) Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.
 - δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 xf(x)dx$.

23) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ και $f(-1) = 2$.

- i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
Για τα επόμενα ερωτήματα, υποθέτουμε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2\ln x + 2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.
- ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τα σημεία καμπής και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής της παράστασης στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$.
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, την ευθεία (ϵ) και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + \ln(x^2 - 4x + 6)$ με $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $e^{f(x)-x} \cdot (f^2(x) - 4f(x) + 6) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \dots (1)$

- i. Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. α) Να μελετηθεί η συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια ότι ισχύει $f^{-1} = g$.
- iii. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} , που απέχει ελάχιστα από την διχοτόμο της γωνίας $1^{ου} - 3^{ου}$ τεταρτημορίου.
- iv. Να δείξετε ότι $f(x) \leq x - \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- v. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

25) END.