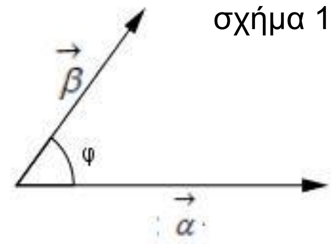
ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ



σχήμα 1

1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot συν\phi$, όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχήμα 1). Εάν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$.
2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα). Συνέπεια της αντιμεταθετικής ιδιότητας, είναι ότι ισχύουν οι γνωστές ταυτότητες από την άλγεβρα, πχ $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2$.
3. $\vec{\alpha}\upuparrows\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$, γιατί φ=$0^0$ και συν0^0=1

   Άμεση συνέπεια του παραπάνω είναι $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$, γιατί $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot συν0^0=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|^2$

   ειδικά $|\vec{i}|^2=1$ και $|\vec{j}|^2=1$

4. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$, γιατί φ=$180^0$ και συν180^0= -1
5. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$, γιατί φ=$90^0$ και συν90^0=0. Ειδικά $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$.
6. Εάν φ<90^0, τότε συνφ>0 και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$
7. Εάν φ>90^0, τότε συνφ<0 και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$
8. Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου: Εάν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$,τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$
9. Εάν λ∈R, τότε $(\lambda\vec{\alpha})\vec{\beta}=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$
10. $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\pm\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
11. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$
12. συνφ=$\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ και συνφ=$\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
13. Αν ζητείται ή δίνεται η καθετότητα δυο διανυσμάτων, κάνουμε χρήση της σχέσης $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
14. Αν ζητείται ο υπολογισμός του μέτρου του γραμμικού συνδυασμού $\vec{\gamma}$ δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ($\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$), τότε κάνουμε χρήση της ιδιότητας $\vec{\gamma}^2=|\vec{\gamma}|^2$
15. Εάν ζητείται η **παραλληλία** δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, κάνουμε χρήση μιας από τις ιδιότητες: **i.** $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, **ii.** $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$

iii. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$

16. Εάν ζητείται να αποδείξουμε ότι δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ομόρροπα**, κάνουμε χρήση μιας από τις ιδιότητες: **i.** $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, με λ>0 **ii.** $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

iii. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **iv.** $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow$ συν$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=1$

17. Εάν ζητείται να αποδείξουμε ότι δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **αντίρροπα**, κάνουμε χρήση μιας από τις ιδιότητες: **i.** $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, με λ<0 **ii.** $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \Big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\Big|$

iii. $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **iv.** $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow$ συν$(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = -1$

18. Για την αντιμετώπιση προβλημάτων γεωμετρίας, εκμεταλλευόμαστε την καθετότητα. Αντικαθιστούμε κάποια διανύσματα του εσωτερικού γινομένου με άθροισμα ή διαφορά των διανυσμάτων θέσης, χρησιμοποιώντας σημείο αναφοράς κάποιο σημείο του σχήματος. Αν η μέθοδος αυτή δεν λειτουργεί, τότε κατασκευάζουμε σύστημα συν/νων και επιλύουμε το πρόβλημα με την αναλυτική μέθοδο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α=3 και το ύψος του ΑΔ. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

a. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}$

b. $\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}$

c. $\vec{A\Delta}\cdot\vec{BA}$

2. Εάν $3|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 6$, να υπολογίσετε το λ∈R, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

3. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

4. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} - \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\cdot\vec{\alpha}$ είναι κάθετα.

5. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(ρβ,ρα-2β) και $\vec{\beta}$=(α+ρβ,ρα) με $\rho = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ είναι κάθετα.

6. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα. Εάν $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta}-\vec{\gamma})$.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)$ και $\vec{\beta} = \left(\dfrac{2\kappa}{1+\kappa^2}, \dfrac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2}\right)$, με κλ=1. Να δείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ **β)** $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=6$ και ισχύει $(4x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}) \perp (y\vec{\alpha}-9x\vec{\beta})$, για κάθε $x,y\in R$. **α)** Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

9. Εάν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x^2+y^2,-1)$ και $\vec{\beta}=(1,2x-4y-5)$ είναι κάθετα, να υπολογίσετε τα x και y.

10. Εάν τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι Α(-1,0), Β(-2,-3), Γ(2,-1) και ΑΔ το ύψος του, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

11. Εάν $\vec{AB}=6\vec{i}-2\vec{j}$ και $\vec{A\Gamma}=3\vec{i}+4\vec{j}$, να βρείτε τις συν/νες του διανύσματος $\vec{AH}$, όπου Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

12. Εάν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{x}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$.

13. Εάν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

14. Εάν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $|3\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=1$, να υπολογίσετε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.

15. Εάν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ μοναδιαία διανύσματα και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\,\vec{\beta}+\vec{\beta}\,\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\,\vec{\alpha}=$ $=-\frac{3}{2}$.

16. Εάν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ μοναδιαία διανύσματα και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{3}$, να υπολογίστε το μέτρο $|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}|$.

17) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε :

a) το γινόμενο $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})$,

b) το μέτρο των διανυσμάτων $3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

c) το συνημίτονο της γωνίας $(\widehat{3\vec{\alpha}-2\vec{\beta},\ 3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}})$.

18) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}|=\frac{|\vec{\beta}|}{2}=\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε:

a) $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

b) $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$

c) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$

d) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$

e) $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta})$.

19) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ διανύσματα με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$.

a) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

b) Να υπολογίσετε την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$.

20) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα με $4|\vec{\alpha}|=3\sqrt{3}|\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha}\perp(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$. Να δείξετε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$.

21) Να δείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|$

22) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

23) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

24) Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\chi}$ τέτοιο ώστε $\vec{\chi} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\chi})$.

25) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 3)$ και $\vec{\beta} = (2, -6)$, σχηματίζουν γωνία 60^0.

26) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}, 1 - \sqrt{2}\right)$ και $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \sqrt{2} + 1\right)$, σχηματίζουν γωνία 150^0.

27) Αν $\vec{\alpha} = \left((x-1)\sqrt{3}, 2x\right)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$, να υπολογίσετε το χ, ώστε $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.

28) Αν για τα διανύσματα ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να αποδείξετε ότι :

i) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και

ii) $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$.

29) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta})$, όταν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μοναδιαία διανύσματα με $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} = \frac{\pi}{6}$.

30) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta} = (5,10)$ σε δυο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, -4)$.

31) Έστω $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{\beta} = -2\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\gamma} = 3\vec{i} - \vec{j}$. Να αναλυθεί το $\vec{\alpha}$ σε δυο συνιστώσες, από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\gamma}$.

32) Εάν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$, $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\gamma})} = \frac{\pi}{6}$ και $\widehat{(\vec{\beta},\vec{\gamma})} = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το μέτρο του $\sqrt{3}\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$ και να γραφεί το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

33) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}, \vec{y}$ μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \# \vec{\beta}$.

a) Εάν $\vec{\alpha}\vec{x} = \vec{\alpha}\vec{y}$ και $\vec{\beta}\vec{x} = \vec{\beta}\vec{y}$, τότε ποια απάντηση είναι σωστή;

i) $\vec{x} \# \vec{y}$ **ii.** $\vec{x} \perp \vec{y}$ **iii.** $\vec{x} = \vec{y}$

b) Εάν επιπλέον $|\vec{\alpha}| = 1$, να δείξετε ότι $(\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 \neq \vec{\beta}^2$.

34) Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γνωστά διανύσματα.

a) Εάν $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \frac{2}{3}(\vec{\beta}^2 - \vec{\alpha}^2)$,

b) εάν ακόμη $|\vec{\alpha}| = 4$ και $|\vec{\beta}| = 5$, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$.

35) Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$, $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = \sqrt{7}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.

a) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά,

b) υπολογίστε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\vec{\beta}$, $\vec{\beta}\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ και την γωνία $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$,

c) εάν για το διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύουν $\left\{\begin{matrix} \vec{x} // (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \\ \kappa\alpha\iota \\ (\vec{x} + \vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \end{matrix}\right\}$, να δείξετε ότι $\vec{x} = -\frac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και να υπολογίσετε το $|\vec{x}|$.

36) Εάν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρία μοναδιαία διανύσματα και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ =0, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

37) Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=90^0) και το ύψος του ΑΔ. Να δείξετε ότι :

a. $\vec{AB}^2=\vec{B\Delta}\cdot\vec{B\Gamma}$

b. $\vec{A\Delta}^2=\vec{B\Delta}\cdot\vec{\Delta\Gamma}$

c. $\vec{AB}^2+\vec{A\Gamma}^2=\vec{B\Gamma}^2$.

38) Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μέτρου 4. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων Ν του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε $\vec{AN}\cdot\vec{NB}=-5$, είναι κύκλος με κέντρο το μέσο Ο του ΑΒ. Ποια είναι η ακτίνα του κύκλου;

39) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο του ΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $\vec{\Delta M}\cdot\vec{B\Gamma}+2\cdot\vec{\Delta M}\cdot\vec{BA}=0$.

40) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0). Από τυχαίο σημείο Ε της ΑΓ φέρνουμε ευθεία κάθετη στην ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Δ. Να δείξετε ότι ΒΕ $\perp$ ΓΔ.

41)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{27}{4}$
2. λ=$\pm\frac{1}{3}$
8. $|\vec{\beta}|=4$ και $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$=10
9. x= -1, y=2
10. Δ(0,-2)
11. $\vec{AH}$=(2,1)
12. $\sqrt{112}$
13. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{7}$ και $|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=\sqrt{13}$
14. $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=\frac{1}{\sqrt{10}}$
15. $|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=\sqrt{5}$
16. 15, $\sqrt{13}$, $\sqrt{37}$, $-\frac{7}{\sqrt{481}}$
18. 2, 10, 14, $\sqrt{14}$, 140
19. 45^0
21. 60^0
23. $\vec{\chi}=-\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$
26. x=±1
28. συνφ=$\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$
29. (-3,4) και (8,6)
30.
31. $|\sqrt{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}|$=0, $\vec{\gamma}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$
32. $\vec{x}=\vec{y}$, Εάν $(\vec{\alpha}\,\vec{\beta})^2=\vec{\beta}^{\,2}\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ συνφ= =±1 άρα $\vec{a}\,//\,\vec{\beta}$ άτοπο
33. $\frac{3}{10}$
34. $\vec{\alpha}\vec{\beta}=\frac{9}{2}$, $\vec{\beta}\vec{\gamma}=\frac{15}{2}$, $\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ =6, φ=π/3, $|\vec{x}|=\frac{21}{4}$
35. Στη σχέση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ =0 αναλύουμε τα εσωτερικά γινόμενα με τον ορισμό.
36. Σε όλα τα ερωτήματα παίρνουμε το 2^o μέλος και χρησιμοποιούμε ως σημείο αναφοράς το Α.
37. Σημείο αναφοράς το Ο. ρ=3
38. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά (ΒΕ)=2(ΑΒ). Η δοσμένη σχέση γίνεται $\vec{\Delta M}\cdot\vec{E\Gamma}=0$.Ο γ.τ. είναι η ευθεία ΔΜ $\perp$ ΕΓ.
39. Ορίζουμε σύστημα συν/νων με κέντρο Α
40. δ