

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=2x^2-x+5$ που διέρχεται από το σημείο της $A(3, f(3))$.
2. Ομοίως της $f(x)=\ln x$, στο σημείο της με τεταγμένη e .
3. Ομοίως της $f(x) = \frac{x-1}{x}$, στο σημείο της με τεταγμένη $1/2$.
4. Ομοίως της $f(x)=-x^3+4x$, στο σημείο της $A(x_0,0)$.
5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, όταν $f'(x_0)=3$.
6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=\eta\mu x$, $x \in (0, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 3\pi)$ στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, όταν $f'(x_0)=0$.
7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=e^x$, που σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον θετικό ημιάξονα Ox .
8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=-x^2$, που σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με τον άξονα yOy' (δύο περιπτώσεις).
9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=-x^2+3x-5$, που είναι παράλληλη στην ευθεία $x+y+5=0$.
10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3-x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $x+2y+6=0$.
11. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=\ln x$, που είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2e)$ και $B(2, e)$.
12. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=e^x \eta\mu x$, $x \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, που είναι παράλληλη στον άξονα xOx' .
13. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3-7x+6$, στα σημεία που αυτή τέμνει τους άξονες.
14. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3$ που διέρχεται από το σημείο $A(-1, -5)$.
15. Να δείξετε ότι η ευθεία $8x+y-11=0$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^4-6x^2+8$.
16. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x^2-4x+5$ και $g(x)=-x^2+2x+2$, έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.
17. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2+4x+33$ και $g(x)=-x^2-1$.
18. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=\frac{1}{9}(ax-x^3)$ στα σημεία που αυτή τέμνει τον άξονα xOx' , να σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία 45° .
19. Έστω $f(x) = \frac{ax^3+\beta}{x}$. Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$ και η εφαπτομένη της στο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης -4 .
20. Έστω $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$. Να βρείτε τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο της $B(2, -1)$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon): x-3y-6=0$.
21. Βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη C_f της
$$f(x) = \begin{cases} x\eta\mu x + a, & x \leq 0 \\ x^2 + (\beta - 2)x + 2, & x > 0 \end{cases}$$
 στο σημείο με $x_0=0$ να ορίζεται.
22. Έστω $f(x)=x^3+ax^2+\beta x+\gamma$. Να βρείτε τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 1), B(1, -3)$ και οι εφαπτομένες της στα σημεία A και B να είναι κάθετες μεταξύ τους.
23. **23937-2:** Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}.$$
 - α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)
 - β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 8)
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $A(1, f(1))$. (Μονάδες 9)
24. **24757-2:** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία 45° .
 - α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (Μονάδες 8)
 - β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)
 - γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$. (Μονάδες 9)
25. **25762-2:** Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}.$$
 - α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 8)
 - β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$. (Μονάδες 10)
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$. (Μονάδες 7)
26. **26630-2:** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , \text{αν } x < 0 \\ 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \text{συν}x & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 7)

27.28302-2: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της $g \circ f$ στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

28.28340-4: Έστω μια συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x + 1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(f \circ g)'(2)$ και $(g \circ f)'(-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f \circ g}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της $C_{g \circ f}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

29.END.

