ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x^2$, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις:
   i. x=-1 και x=1.
   ii. x=1 και x=2.
   iii. x=-1 και x=2.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}6x^2+2, & \text{αν } x<0\\ 2\text{-}2x, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$.
   i. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.
   ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες με εξισώσεις **α)** y=0, x=0, x=1
   β)y=0, x=-1, x=2.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x^2-4x|$, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις:
   i. x=0 και x=3.
   ii. x=0 και x=5.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=2-|3-x| και τις ευθείες με εξισώσεις x=0, x=4, y=0.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^4-x^2$ και τον άξονα x'x.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}6x^2, & \text{αν } x\geq -1\\ -\frac{6}{x}, & \text{αν } x<-1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον άξονα x'x και την ευθεία x=-2.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+3$ και τον άξονα x'x.

8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x$ και τον άξονα x'x.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x^3-5x^2$, $g(x)=x^3-4x^2$, και των ευθειών με εξισώσεις **α)** x=-2, x=1 **β)** x=-1, x=2.

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3x^4+x^2$ και $g(x)=2x^4+2x^2$.

11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-2x+\frac{1}{2}$ και την ευθεία 4x-2y+1=0.

12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=4x και $g(x)=x^3$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Να υπολογίσετε:
   i. Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f, στο σημείο Α(-2,4).
   ii. Την κυρτότητα της f.
   iii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την (ε) και τον άξονα x'x.

14. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=lnx, $g(x)=ln\frac{1}{x}$ και την ευθεία με εξίσωση y=-1.

15. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0, x=3. Να βρείτε ευθεία x=α, που να χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα τμήματα.

16. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις y=0, x=0, x=2. Να βρείτε ευθεία x=α, που να χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα τμήματα.

17. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=-lnx, την εφαπτομένη της στο σημείο της $M\left(\frac{1}{e},1\right)$ και τον άξονα x'x.

18. **α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ω του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\frac{6}{x}$, και τις ευθείες με εξισώσεις x=0, y=1 και y=3.

β) Να βρεθεί η τιμή του α, για την οποία η ευθεία y=α, χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα χωρία.

19. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=x^3-x, και τις ευθείες με εξισώσεις y=0, x=0, x=1. Να βρεθεί η τιμή του α, για την οποία η ευθεία y=αx, χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα χωρία.

20. Για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν f(0)=g(0), f΄(3)=4+g΄(3) και f΄΄(x)=2+g΄΄(x) για κάθε x∈[0,3]. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=3.

21. **α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\frac{1}{x^2}$, και τις ευθείες με εξισώσεις y=0, x=1 και x=λ, με λ∈IR, λ>1.

β) Να υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

22. **α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\frac{\ln x}{x^2}$, τον άξονα x'x και την ευθεία x=λ, με λ∈IR, 0<λ≠1.

β) Να υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to0} E(\lambda)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=e^x+x-1.

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα x'x και την ευθεία x=e.

24. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x-ημx, x∈[0,2π].

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

iii. Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

iv. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται.

v. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και της f^{-1}.

25. Έστω συνάρτηση f : IR→IR η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε f(1)=0, f΄(x)=e^{x^2} για κάθε x∈IR. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τους άξονες x'x και y΄y.

26. Έστω συνάρτηση f : IR→IR η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε f^3(x)+2f(x)=3x για κάθε x∈IR. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1.

27. Έστω συνάρτηση f : IR→IR η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

☛ f(-1)=-1 καιf(1)=1.

☛ f(x)≠0 για κάθε x∈IR*.

☛ $f'(x)=\frac{1+2x^2}{x}f(x)$ για κάθε x∈IR*.

i. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f.

ii. Να αποδείξετε ότι f(x)=xe^{x^2-1} για κάθε x∈IR.

iii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

iv. Υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΗΝ Ε.Μ.Ε.

28. (***Προτεινόμενο ΕΜΕ 2016***) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g: $(-1,+\infty)\to$ IR με $f(x)=\ln(x+1)$ και $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(x)=f(x)+g(x)$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα, δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο O(0,0), η οποία διχοτομεί την γωνία 1ου – 3ου τεταρτημόριων.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία x=3.

iv. Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στην C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec. Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x'x και A(0,α) σημείο του άξονα y'y, με α>0, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής Ε΄(t) του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΜΝ κάθε στιγμή t ισούται με Φ(x(t)).

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, την χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με $\left(2\ln 3+\frac{8}{9}\right)cm^2/sec$.

29. (***Προτεινόμενο ΕΜΕ 2016***)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\ln x-1=0$, με x>1, έχει ακριβώς μια λύση.

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(1,+\infty)\to$ IR, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)=x\ln x(f(x)-f'(x))$, για κάθε x>1.
- $f(e)=e^e$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Αν $f(x)=\frac{e^x}{\ln x}$, x>1

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

2. Εάν Ε(α) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x)=f(x)+x\ln x\cdot f'(x)$, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=2 και x=α με α>2, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(E(\alpha)\cdot \eta\mu\frac{1}{E(\alpha)}\right)$.

30. (***Προτεινόμενο ΕΜΕ 2016***) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : IR→IR, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Μ(1,2e). Αν η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $(x_0,f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0+1,2e^{x_0})$:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x+e^{2-x}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha}+\frac{f(2x)}{x-\beta}=2017$, α,β∈R, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $y=e^2+1$.

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=1.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}(x^3-x)$, x∈IR.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να δείξετε ότι, αν x_1 και x_2 οι θέσεις τοπικών ακροτάτων, τότε τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και το σημείο καμπής είναι συνευθειακά.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=-x έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

v. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f της f και τον άξονα x'x.

32. (**Θέμα 2ον 2001**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2, & \alpha\nu\ \ x\le 3\\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & \alpha\nu\ \ x>3\end{cases}$.

i. Αν η f είναι συνεχής, να δείξετε ότι $\alpha=-\frac{1}{9}$. Μονάδες 9

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(4,f(4)). Μονάδες 7

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=1 και x=2. Μονάδες 9

33. (**Θέμα 4ον 2002**)

i. Δίνονται οι συναρτήσεις h και g συνεχείς στο [α,β].
Να δείξετε ότι αν h(x)>g(x) στο [α,β], τότε $\int_a^\beta h(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx$. Μονάδες 2

ii. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ για κάθε x∈IR και f(0)=0.

a) Να εκφράσετε την f΄ ως συνάρτηση της f. Μονάδες 5

b) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε x>0. Μονάδες 12

c) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=0 και x=1, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$. Μονάδες 6

34. (**Θέμα 3ον 2003**) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε x∈IR. Μονάδες 6

iii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο O(0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}. Μονάδες 5

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα x'x και την ευθεία με εξίσωση x=3. Μονάδες 6

35. (**Θέμα 3ον 2005**) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}$, λ>0.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 3

ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από το O(0,0) έχει εξίσωση y=λex. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. Μονάδες 7

iii. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα y'y και την εφαπτομένη της στο σημείο Μ, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$. Μονάδες 8

iv. Υπολογίστε το όριο $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$. Μονάδες 7

36. (**Θέμα 2ον 2006**) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$, με x≥2.

i. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1». Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}. Μονάδες 8

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x. Μονάδες 4

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}. Μονάδες 7

37. (**Θέμα Γ 2012**) Δίνεται συνάρτηση f(x)=(x-1)lnx-1, x>0.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, x>0, έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες. Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 οι δυο ρίζες της εξίσωσης του Γ2 ερωτήματος, με $x_1<x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$. Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=f(x)+1, x>0, τον άξονα x'x και την ευθεία x=e. Μονάδες 7

38. (**Θέμα Γ 2014**) Δίνεται συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1)$, x∈IR.

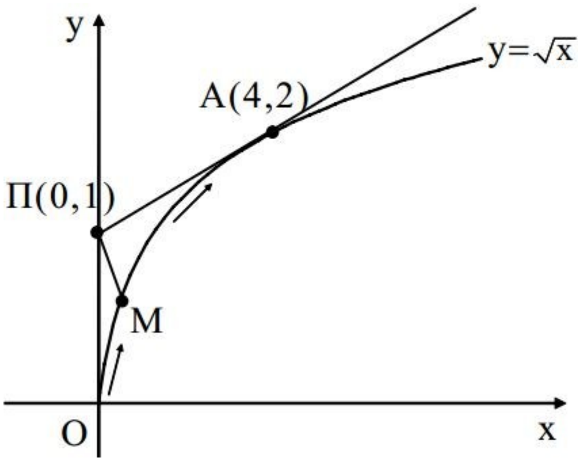
Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$. Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο +∞ και την πλάγια ασύμπτωτή της στο -∞. Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$, τον άξονα x'x και την ευθεία x=1. Μονάδες 7

39. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, x≥0. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, t≥0 είναι x′(t)=16m/min.



i. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, t ≥ 0 δίνεται από τον τύπο: x(t)=16t. Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. Μονάδες 6

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α. Μονάδες 6

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, {}^1/_4)$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

40. (**ΘΕΜΑ Δ 2015**) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : IR→IR για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$, για κάθε x∈IR και
- f(0) 0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι f(x) = $ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, x∈IR. Μονάδες 5

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f (μονάδες 3).

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0 και x=1 (μονάδες 4).

Μονάδες 7

Δ3. (Διαμορφωμένο) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}[(e^x-1)\ln\,|f(x)|]$. Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt}{x-3}+\dfrac{8-3\int_0^{x}f^2(t)dt}{x-2}=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3). Μονάδες 7

41. (**Προτεινόμενο ΕΜΕ 2016**) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : IR→IR, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

☛ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+e}{x}=1$.

☛ $f(x+y)=e^{2xy}(e^{y^2}f(x)+e^{x^2}f(y)+e^{x^2+1}+e^{y^2+1})-e$, για κάθε x,y∈R.

Να αποδείξετε ότι:

i. f΄(0)=1.

ii. $f΄(x)=2xf(x)+e^{x^2}+2ex$, για κάθε x∈IR.

iii. $f(x)=xe^{x^2}-e$, για κάθε x∈IR.

iv. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης , την ευθεία x=-2e, και τους άξονες x΄x και y΄y.

42. **ΘΕΜΑ Γ 2017**: Δίνεται η συνάρτηση f(x) = - ημx **,** x∈[0,π] και το σημείο Α($^π/_2$,$-^π/_2$).

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(ε_1)$, $(ε_2)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε. Μονάδες 8

Γ2. Αν $(ε_1)$: y=-x και $(ε_2)$: y=x-π είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις $(ε_1)$, $(ε_2)$ και τη γραφική παράσταση της f , και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $(ε_1)$, $(ε_2)$ και

- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x. Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τ ο όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+\pi}{f(x)-x+\pi}$. Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$. Μονάδες 7

43. ΘΕΜΑ Δ 2017: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, x\epsilon[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, x\epsilon[0,\pi]\end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [-1,π] και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της. Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x\in$IR, τον άξονα y'y και την ευθεία x=π . Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$. Μονάδες 8

44. ΘΕΜΑ Δ 2019: Δίνονται η συνάρτηση f : IR→IR, με τύπο $f(x) = (x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$, όπου α, β∈IR και η ευθεία (ε) : y = - x + 2, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της Α(1, 1).

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = - 1 και β = 2. Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τις ευθείες x = 1 και x = 2. Μονάδες 5

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε x∈IR (Μονάδες 3).

ii) Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$, για κάθε λ∈IR (Μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3-x-2$, x∈IR, έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

45. Δίνεται η συνάρτηση f : (0,+∞) → IR, με τύπο $f(x) = x - \ln(3x)$.

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα x΄x , να αποδείξετε ότι $E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$. Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(2-x_1) < 0$. Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση. Μονάδες 6

46. ΘΕΜΑ Γ 2023: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, & x<1\\ \frac{1}{x}+\alpha, & x\geq 1\end{cases}$, όπου α∈IR, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\int_2^3 xf(x)dx$=1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α = 0. **Μονάδες 4**

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ4. Έστω (ε): y = - x + 2 η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με x ≥ 1, την ευθεία (ε), τον άξονα x΄x και την ευθεία x=e. **Μονάδες 7**

47. ΘΕΜΑ Δ 2024: Έστω η συνάρτηση f: IR → IR με τύπο $f(x) = \frac{\ln x+\alpha x}{x}$, όπου α∈IR. Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0,+\infty)) = \left(-\infty,\ 1+\frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = 1. **Μονάδες 4**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x_0, που ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$. **Μονάδες 6**

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=f(4), έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$. (μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \le x^2$ στο διάστημα (0, +∞). (μονάδες 5) **Μονάδες 8**

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g: IR → IR. με τύπο $g(x) = f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες x = - ln2 και x=0 και περικλείεται από αυτές, τον άξονα x΄x και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. **Μονάδες 7**

48. ΘΕΜΑ Δ 2025: Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f : (0,+∞) → IR και μια παράγουσα F, της f στο (0,+∞), για τις οποίες ισχύει ότι xf(x)=2F(x)lnx, για κάθε x > 0. Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M(1,f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): y=2x.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, είναι σταθερή. Μονάδες 6

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι F(1)=1 (μονάδες 3) και $F(x)=x^{\ln x}$, για κάθε x > 0 (μονάδες 2). Μονάδες 9

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2)= F(x) - (x-1)^2$ στο διάστημα (0,+∞) (μονάδες 3). Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τις ευθείες x =1, x = e και τον άξονα x΄x ισχύει E > 2e-3. Μονάδες 5

49. ΘΕΜΑ Δ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2024: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g : $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ → IR (0 , π], για τις οποίες ισχύει:

- $|g(x) - g(y)| \le (x-y)^2$, για κάθε x, y∈$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.
- g(x) = f(x)ημx, για κάθε x∈$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε x∈$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (Μονάδες 4).

ii) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$ (Μονάδες 1). **Μονάδες 5**

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-2}{x-\frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2})-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{2}} = 0$, με α∈$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$' **Μονάδες 6**

Δ4. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = \frac{1}{2}\ln(1-\sigma\upsilon\nu x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)$, x∈$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x) = \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (Μονάδες 2).

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες y=2 και $x = \frac{\pi}{2}$ (Μονάδες 6). **Μονάδες 8**

50. ΘΕΜΑ Δ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2023: Δίνεται η συνάρτηση f : IR → IR με $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \ge 0 \\ -e^{-x}+2, & x < 0 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1,f(x_1))$ με $x_1 > 0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0), έχει εξίσωση y = e · x. Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής Α, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0,f(x_0))$. Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της, (ε) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες $x = x_0$ και $x = 1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0. Μονάδες 6

Δ4. Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Β του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΟ , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους; Μονάδες 6

51. ΘΕΜΑ Β ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ (λόγω πλημμυρών) 2023: Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. Μονάδες 6

Β3. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$. Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x = 1 και x = e. Μονάδες 7

52. END

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ

53. 23218-4: Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $K(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2, με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_P και των ευθειών $x = x_1$, $x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_P και των ευθειών $x = x_2, x = -1$. (Μονάδες 8)

54. 24275-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία y=-x+1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \rho$ ισούται με:

$$E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho - 1) + e^{-1} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$ (Μονάδες 09)

55. 24704-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx + e^x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - lnx_0)$. (Μονάδες 10)

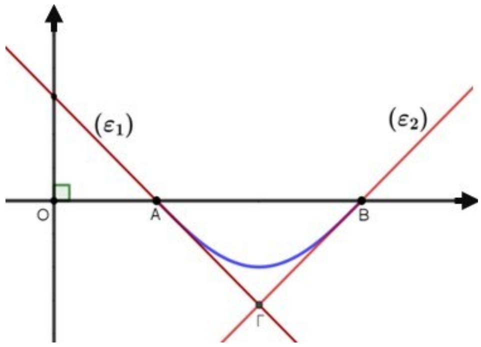
56. 25147-4: Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in [0,2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g. (Μονάδες 9)

57. 25235-4: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι (ε_1) $y = -x + \frac{\pi}{2}$ και (ε_2): $y = = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$. (Μονάδες 8)

58. 25259-4: Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR → IR, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

1) Να αποδειχθεί ότι:

a. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$. (Μονάδες 6)

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$. (Μονάδες 7)

2) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

a. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$. (Μονάδες 6)

Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$. (Μονάδες 6)

59. 25746-4: Έστω συνάρτηση f: IR → IR παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in$ IR και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο IR. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$. (Μονάδες 7)

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$. (Μονάδες 6)

60. 25765-4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\,lnx + x$, $\quad x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω g : IR → IR μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$, για κάθε $x \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}, x \in$ IR. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1, x = 1$. (Μονάδες 6)

61. 26183-4: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), 0 \le x \le 1 \\ 1 - \frac{4\ln x}{x},\ x > 1 \end{cases}$

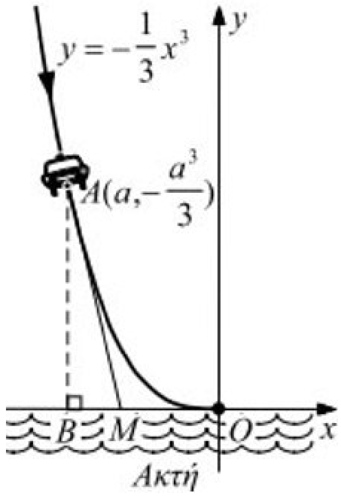
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{ln4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 10)

62. 27031-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.



α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A. (Μονάδες 06)

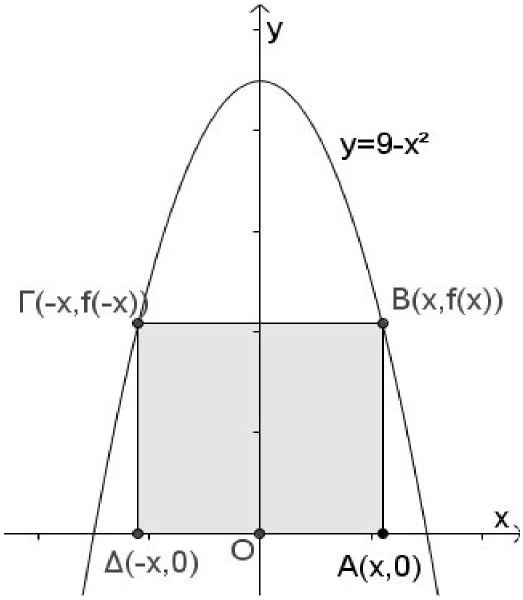
β) i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3,\ x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3. (Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M.

(Μονάδες 2)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3. (Μονάδες 9)

63. 27408-4: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=9-x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x,f(x))$ και $\Gamma(-x,f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x\in[0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=18x-2x^3$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

64. 28476-4: Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR → IR για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)(x-1)}{\ln x}=0$ και $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in$ IR.

α) **i.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$ (Μονάδες 3)

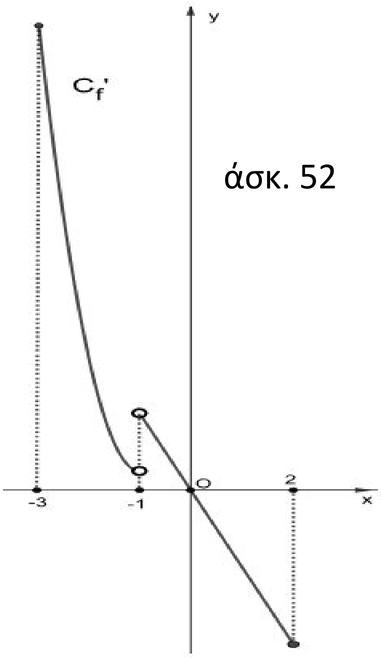
ii. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$. (Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x\in$ IR. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=0$ και $x=1$. (Μονάδες 7)

65. 28870-4: Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [-3,2], η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f, η $C_{f'}$ που στο διάστημα (-1,2] είναι ευθύγραμμο τμήμα.



άσκ. 52

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f, αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους. (Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx=-4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$. (Μονάδες 06)

66. 29645-4: Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1, x<0\\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1,x_2 με $x_1<0$ και $x_2>3$. (Μονάδες 12)

β) **i.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος (α). (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$. (Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία ε και την ευθεία x=0. (Μονάδες 05)

67. 29646-4: Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f. (Μονάδες 9)

ii. Τα σημεία$\mathrm{A}(x_1, f(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2, f(x_2)$ και $\Gamma(x_3, f(x_3)$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 8)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα y'y. (Μονάδες 5)

68. 31148-4: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in R$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in$ IR.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in$ IR. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον ά-ξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z.

(i) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$. (Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{h(x)} = \frac{\mathrm{f(x)-g(x)}}{\mathrm{x}}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = ln2$ και $x = 1$, είναι $\ln\sqrt{2\mathrm{e}} - \frac{2}{\mathrm{e}}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

69. 31149-4: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $ln(1 + f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(ln2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4\mathrm{e}}\right)$. (Μονάδες 9)

70. 31530-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2, x \in \mathbb{R}$.

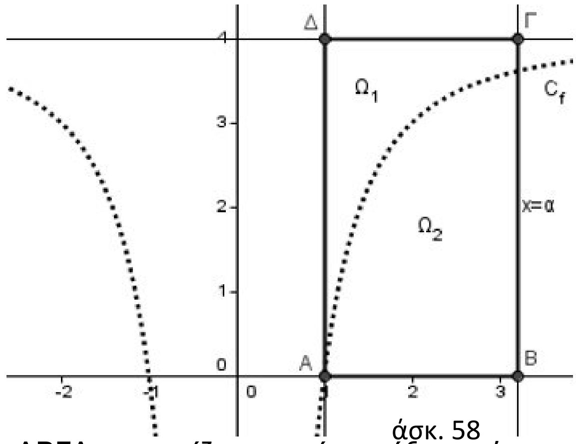
α) **i.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1). (Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1. (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)\,x-5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1,4)$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=2$. (Μονάδες 7)

71. 31533-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-\frac{4}{x^2}, x\neq 0$.



άσκ. 58

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f. (Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1,f(x_1)), B(x_2,f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1x_2=-4$. (Μονάδες 6)

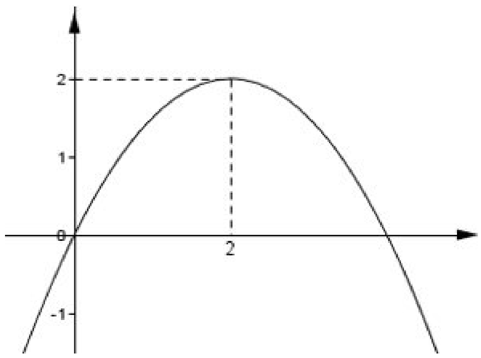
γ) Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1, x=\alpha, \alpha>1$και $y=4$. Η C_fχωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1,Ω_2.

i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1),E(\Omega_2)$ των χωρίων. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)$. (Μονάδες 5)

72. 31534-4: Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2,2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f: IR → IR.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x, x\in$ IR. (Μονάδες 8)



β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 1), να αποδείξετε ότι $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+1$. (Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x)=x^2+x+1-\eta\mu x$, $x\in$ IR.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x>0$. (Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$και $x=\pi$. (Μονάδες 5)

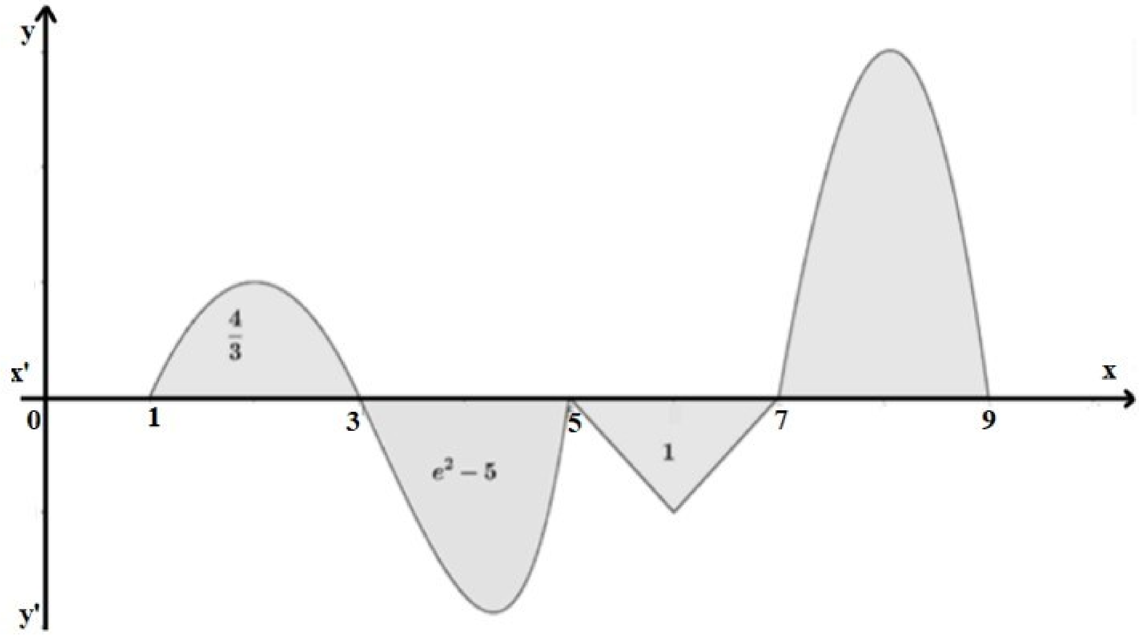
73. 31792-4: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+1, & -1\leq x<1 \\ 1+\frac{(\ln x)^2}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$. (Μονάδες 9)

74. 32800-2: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $[1,9]\to$ IR της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

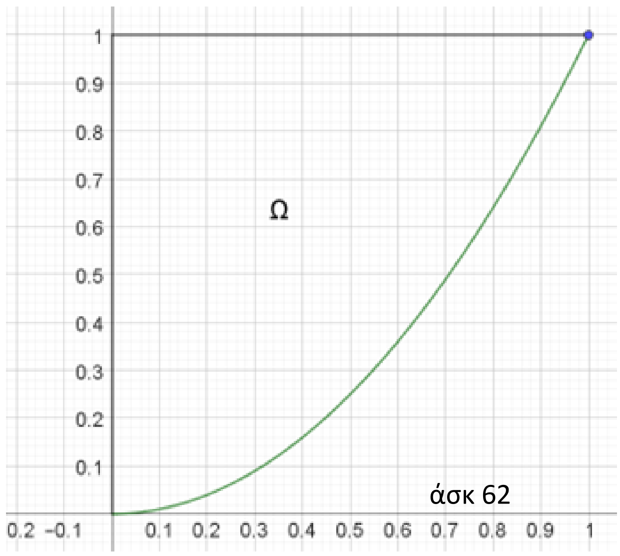
- $\left(\int_7^9 f(x)\,dx\right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες $1, 3, 5, 7$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)\,dx = 4.$ (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,9]$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)\,dx.$ (Μονάδες 8)

75. 33598 ΘΕΜΑ 4: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y = 1$ και τη γραφική παράσταση της f.



α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Μονάδες 5

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 5

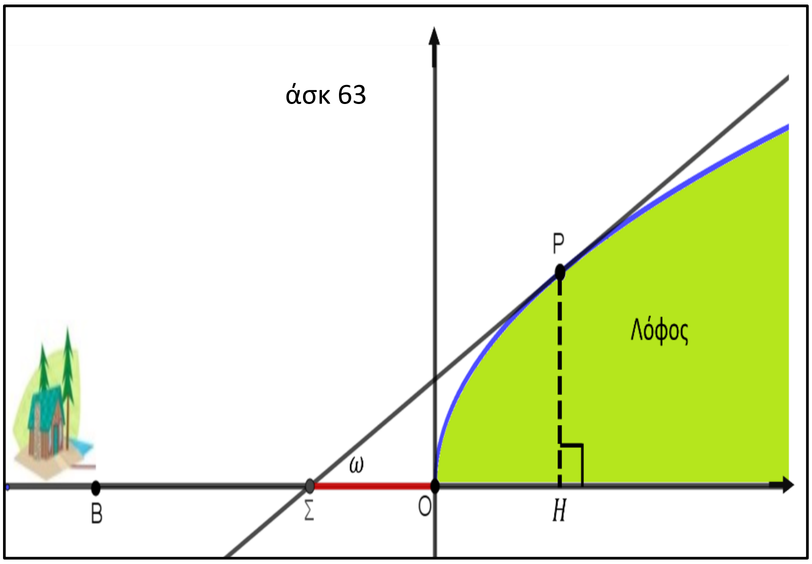
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$. Μονάδες 5

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx.$ Μονάδες 5

ii. $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω. Μονάδες 5

76. 33577 ΘΕΜΑ 4: Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox'. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ για $x\geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.



Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του $O\Sigma$, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t, όπως φαίνεται στο σχήμα.

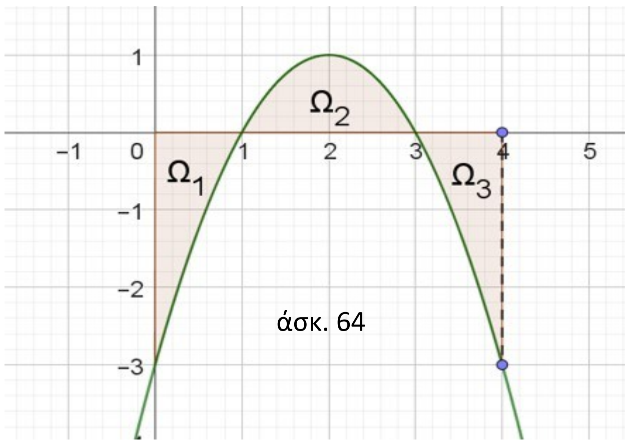
Θεωρούμε $t=0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο O του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά. Ας είναι $\widehat{\omega}=P\widehat{\Sigma}O$.

α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma=-x_P$. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t>0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big)=\frac{1}{2}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{1}{2}}$. Μονάδες 7

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά $(O\Sigma)$ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega=\frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}\,rad$ ανά λεπτό. Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=1+\varepsilon\varphi^2\omega$. Μονάδες 10

77. 33588 ΘΕΜΑ 2: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=E(\Omega_3)=\frac{4}{3}$.



α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$. Μονάδες 6

ii. $\int_0^3 f(x)dx$. Μονάδες 6

iii. $\int_0^4 f(x)dx$. Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x)dx-\int_4^{2023} f(x)dx$. Μονάδες 7

78. 33634 ΘΕΜΑ 4: Έστω $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx$ και $J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I+J=\frac{\pi^2}{4}$. Μονάδες 6

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u=\frac{\pi}{2}-x$ να αποδείξετε ότι $I=J$ και κατόπιν ότι $I=J=\frac{\pi^2}{8}$.

Μονάδες 7

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\frac{\pi}{2}\eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία ΟΑ τέμνει τη C_f στα σημεία $O(0{,}0)$,$A(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,$K(x_o,f(x_o))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1,Ω_2. Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα yy' και της ευθείας $y=\frac{\pi}{2}$ είναι το J.

Μονάδες 6

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1,Ω_2 είναι ίσα . Μονάδες 6

79. 34151 ΘΕΜΑ 4: Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}$, 1. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=4x^3-6x^2+2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,

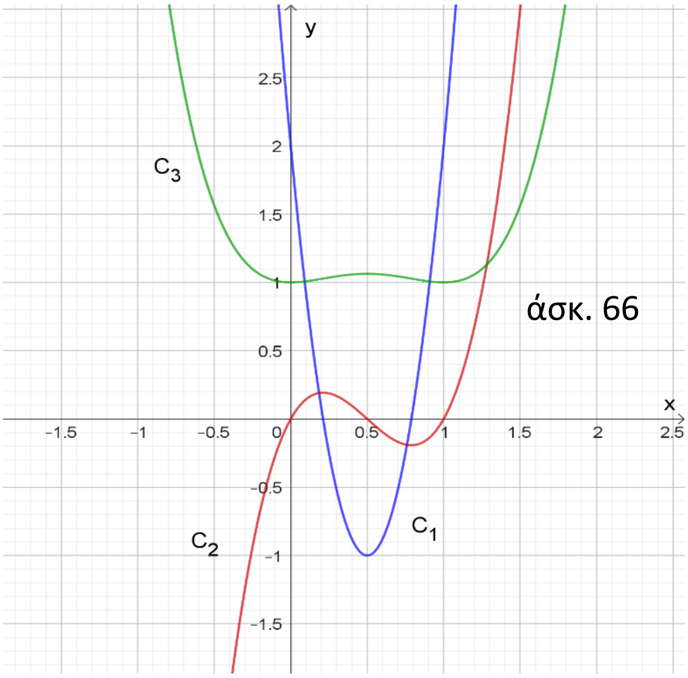
α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 7

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F. Μονάδες 6

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F.

Μονάδες 6

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μονάδες 6



80. 34566 ΘΕΜΑ 4: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $\alpha>0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx=-ln2$.
- $\beta f^2(\beta)=\alpha f^2(\alpha)$.
- $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf^2(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$ και τον άξονα $x'x$, είναι $ln4$ τετραγωνικές μονάδες. Μονάδες 7

γ) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Μονάδες 6

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(\alpha,\beta]$ ισχύει $\frac{G(x)-G(\alpha)}{x-\alpha}<f(\alpha)$. Μονάδες 7

81. 35244 ΘΕΜΑ 4: Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\varepsilon\varphi x-1, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x=(1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

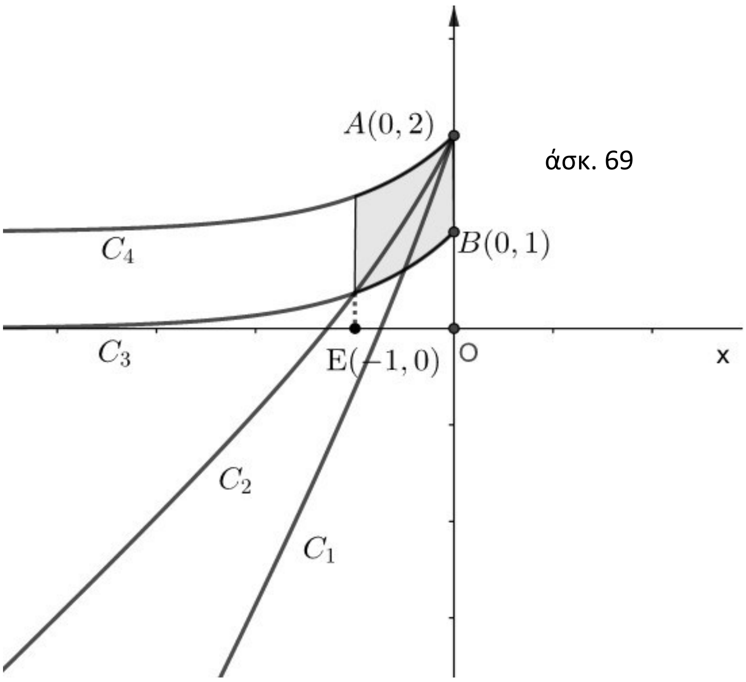
Μονάδες 8

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$. Μονάδες 9

82. 35302 ΘΕΜΑ 4: Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x)=e^x$, $g(x)=e^x+1$ και $h(x)=e^x+x+1$, $x\in(-\infty,0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 9



β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας. Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Μονάδες 7

83. 36837 ΘΕΜΑ 2: Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή ΘΑΛ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο ℝ, που διέρχεται από το σημείο Α(0,2) και τέμνει τον άξονα x’x στο Γ(-1,0).

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$. Μονάδες 5

ii. $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. Μονάδες 5

iii. $\int_{0}^{3} f(x)dx$. Μονάδες 5

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-2$ και $x=3$. Μονάδες 10

84. 36838 ΘΕΜΑ 2: Δίνονται οι συνεχείς στο ℝ συναρτήσεις f και g. Αν $\int_1^3 f(x)dx=6$, $\int_1^8 f(x)dx=$ $=29$, $\int_3^5 f(x)dx=8$ και $\int_1^5 g(x)dx=-6$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx.$ Μονάδες 6

ii. $\int_5^8 2f(x)dx.$ Μονάδες 6

iii. $\int_1^5 (f(x)+g(x))dx.$ Μονάδες 6

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=5$.

Μονάδες 7

85. 36849 ΘΕΜΑ 2: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & αν\ x \leq 0 \\ 1-συνx, & αν\ x > 0 \end{cases}.$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα x'x και των ευθειών x = -2 και x = π. Μονάδες 18

86. END.