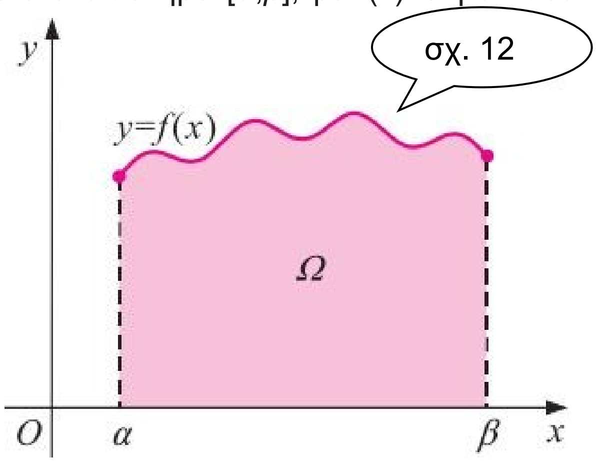
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Ορισμός εμβαδού*: Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

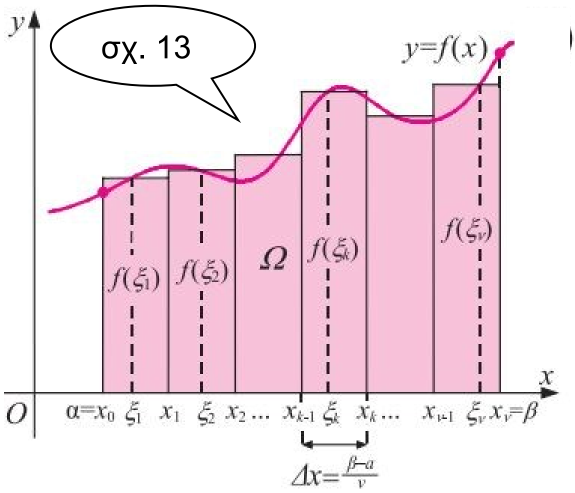


Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω, (σχ. 12), εργαζόμαστε ως εξής:

● Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

● Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$ (σχ. 13). Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι:

$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\ldots+f(\xi_\nu)\Delta x=$
$=[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_\nu)]\Delta x.$



● Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με ***E*(*Ω*)**. Είναι $E(\Omega)\geq 0$.

2. *Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος*:
Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

● Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

● Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\ldots+f(\xi_\nu)\Delta x=\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ *(άθροισμα Riemann)*.

● Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το α στο β». $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$.

3. Εάν $f(x)\geq 0$, το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ισούται με το εμβαδόν **E** του χωρίου Ω, (σχ. 12), που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τον άξονα $x'Ox$ $(y=0)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$ (σχήμα 12). Οι διαιρέσεις των αξόνων εκφράζουν μήκος.

4. Προφανώς το παραπάνω σύμβολο έχει νόημα αν $\alpha<\beta$. Επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για $\alpha>\beta$ ή $\alpha=\beta$ ως εξής:

i. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0.$

ii. $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx.$

5. Εάν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$, και $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) $\int_\alpha^\beta (f(x)\pm g(x))dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\pm\int_\alpha^\beta g(x)dx.$

ii) $\int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx=\kappa\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και γενικά:

iii) $\int_\alpha^\beta (\kappa f(x)+\lambda g(x))dx=k\int_\alpha^\beta f(x)dx+\lambda\int_\alpha^\beta g(x)dx.$

iv) Εάν f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx.$

6. Εάν f συνεχής συνάρτηση στο [α,β], f(x)≥0, στο [α, β], και η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

7. Εάν f, g συνεχείς άνισες συναρτήσεις στο [α, β], και f(x)≥g(x), στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$. (Με απόδειξη) (Άσκηση 5,6).

Απόδειξη: f(x)≥g(x) ⇔ f(x) - g(x) ≥ 0. Επομένως από την προηγούμενη ιδιότητα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

8. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και όχι συνάρτηση, που η τιμή του εξαρτάται μόνο από τα άκρα ολοκλήρωσης α και β και όχι από το γράμμα που παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή της f. Δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du = \ldots$

9. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β], τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] και $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

10. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο [α, β], τότε $m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$.

11. Εάν f είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και α∈Δ, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, x∈Δ, είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε x∈Δ.

12. Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε διάστημα Δ έχει αρχικές συναρτήσεις στο Δ.

13. Εάν f συνεχής στο Δ, μπορεί να υπάρχουν αρχικές συναρτήσεις της f που δεν έχουν την μορφή $\boldsymbol{\int_{\alpha}^{x} f(t)dt}$. Παράδειγμα η F(x)=2+ημx είναι αρχική της f(x)=συνx που δεν μπορεί να γραφτεί στην μορφή $\boldsymbol{\int_{\alpha}^{x} \sigma\upsilon\nu t dt}$, γιατί αν 2+ημx=$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{x} \sigma\upsilon\nu t dt}$, τότε για x=α παίρνουμε 2+ημα=0 ⇔ ημα=-2 άτοπο.

14. <u>Θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού:</u> Εάν f συνεχής σε διάστημα [α,β] και G παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$.

Απόδειξη:

Η συνάρτηση F(x)=$\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι επίσης μια παράγουσα της f στο [*α*,*β*]. Επειδή και η G(x) είναι μια παράγουσα της f στο [*α*,*β*], θα υπάρχει *c*∈R τέτοιο, ώστε

G(x)=F(x)+c…………………………….(1)

Από την (1) για x=*α* έχουμε:

G(α)=F(α)+c=$\overset{0}{\cancel{\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt}}$+c=c……………(2)

Από την (1) για x=*β* έχουμε:

G(β)=F(β)+c=$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$+c

$\overset{(2)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$+G(α)

Επομένως $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$=G(β)-G(α).

15. Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = [f(x)]_{\alpha}^{\beta} = f(\beta) - f(\alpha)$.

16. Βασικά ολοκληρώματα απλών και σύνθετων συναρτήσεων

Απλή	Σύνθετη
	$\int_{\alpha}^{\beta}(f'(x)+g'(x))dx=[f(x)+g(x)]_{\alpha}^{\beta}$
	$\int_{\alpha}^{\beta}(f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx=[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}$
	$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))}{g^2(x)}dx=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
	$\int_{\alpha}^{\beta}f'(g(x))g'(x)dx=[f(g(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}1dx=[x]_{\alpha}^{\beta}=\beta-\alpha$	$\int_{a}^{\beta}f'(x)dx=[f(x)]_{a}^{\beta}=f(\beta)-f(\alpha)$
$\int_{a}^{\beta}cdx=[cx]_{\alpha}^{\beta}=c(\beta-\alpha)$ (Άσκηση 2)	$\int_{a}^{\beta}\lambda f'(x)dx=[\lambda f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}x^{\nu}dx=\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$, ν≠-1	$\int_{a}^{\beta}f^{\nu}(x)f'(x)dx=\left[\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\frac{1}{x^{\nu}}dx=\left[\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$, ν≠1	$\int_{a}^{\beta}\frac{1}{f^{\nu}(x)}f'(x)dx=\left[\frac{f^{-\nu+1}(x)}{-\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=[2\sqrt{x}]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=[2\sqrt{f(x)}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}f'(x)\eta\mu f(x)dx=[-\sigma\upsilon\nu f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\sigma\upsilon\nu x dx=[\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)dx=[\eta\mu f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=[\varepsilon\varphi x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}dx=[\varepsilon\varphi f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\frac{1}{\eta\mu^2 x}dx=[-\sigma\varphi x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}dx=[-\sigma\varphi f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}e^{x}dx=[e^{x}]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}e^{f(x)}f'(x)dx=[e^{f(x)}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\frac{1}{x}dx=[ln\mid x\mid]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}\frac{f'(x)}{f(x)}dx=[ln\mid f(x)\mid]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\alpha^{x}dx=\left[\frac{\alpha^{x}}{ln\,\alpha}\right]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}\alpha^{f(x)}f'(x)dx=\left[\frac{\alpha^{f(x)}}{ln\,\alpha}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta}\varepsilon\varphi x dx=[-ln\mid\sigma\upsilon\nu x\mid]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta}f'(x)\varepsilon\varphi f(x)dx=[-ln\mid\sigma\upsilon\nu f(x)\mid]_{\alpha}^{\beta}$

$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\varphi x dx = [ln\,\vert\, \eta\mu x \vert]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\sigma\varphi f(x) dx = [ln\,\vert\, \eta\mu f(x)\vert]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{c^2-x^2} dx = \left[\frac{1}{2c} ln \frac{c+x}{c-x}\right]_{\alpha}^{\beta}$	(Με απόδειξη)
$\int_{\alpha}^{\beta} ln\,x\, dx = [x\, ln\, x - x]_{\alpha}^{\beta}$	(Με απόδειξη)

17. Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της επιλεγείσης αρχικής συνάρτησης G. Πράγματι εάν F, G είναι δυο αρχικές της f, τότε G(x)=F(x)+c, c=σταθερά, οπότε:

$$G(\beta)-G(\alpha)= F(\beta)+c-(F(\alpha)+c)=F(\beta)+\cancel{c}-F(\alpha)-\cancel{c}=F(\beta)-F(\alpha).$$

18. Παραγοντική ολοκλήρωση: $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx.$

19. Αντικατάσταση μεταβλητής: $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt.$

20. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu^{\kappa}x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\lambda}x dx.$

i. Αν κ, λ άρτιοι εφαρμόζουμε τους τύπους αποτετραγωνισμού $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$.

ii. Αν κ= περιττός, θέτω συνx=u.

iii. Αν λ= περιττός, θέτω ημx=u.

21. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$

i. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων.

ii. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του παρονομαστή, κάνουμε την διαίρεση και καταλήγουμε στην περίπτωση (i).

22. Εάν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, τότε:

i. Αν Δ=0 τότε η παράσταση είναι ρητή.

ii. Αν Δ>0, θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = (x-\rho_1)u$, όπου ρ_1 η μια από τις δυο ρίζες του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

iii. Αν Δ<0, τότε αναγκαστικά α>0 και θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x-u)$.

23. Εάν f συνεχής στο [-α,α] και **περιττή**, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

Πράγματι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{0} f(-u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} f(u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx =$

Θέτω x=-u. Τότε dx=-du.

Για x=-α, u=α

f περιττή

$= \cancel{-\int_{0}^{\alpha} f(u)du} + \cancel{\int_{0}^{\alpha} f(x)dx} = 0$. (Άσκηση 2)

24. Εάν f συνεχής στο [-α,α] και **άρτια**, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$. Πράγματι

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{0} f(-u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{0} f(u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx =$

f άρτια

Θέτω x=-u. Τότε dx=-du.
Για x=-α, u=α
και νια x=0. u=0

$= \int_{0}^{\alpha} f(u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(u)du$. (Άσκηση 3)

25. Εάν f συνεχής στο R και **περιοδική** με περίοδο T, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx$. Πράγματι θέτω x=u+T, οπότε dx=du και για x=α+T ⇒ u=α και για x=β+T ⇒ u=β, και :

$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u+T)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du$. (Άσκηση 4)

f περιοδική

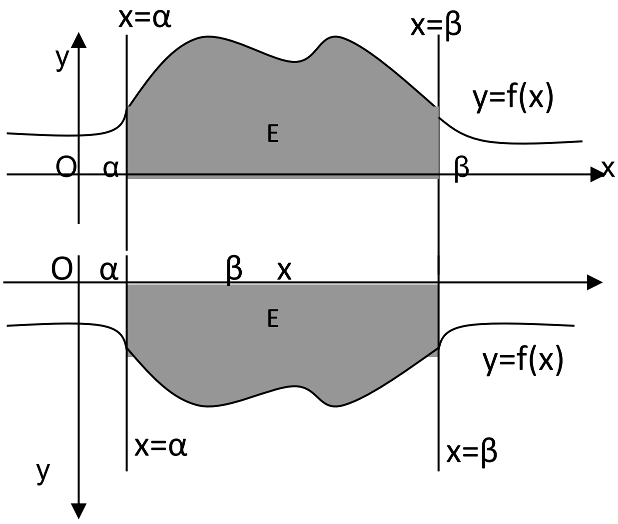
ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

1. Εάν f συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x), τον άξονα x΄Ox (y=0) και τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β είναι

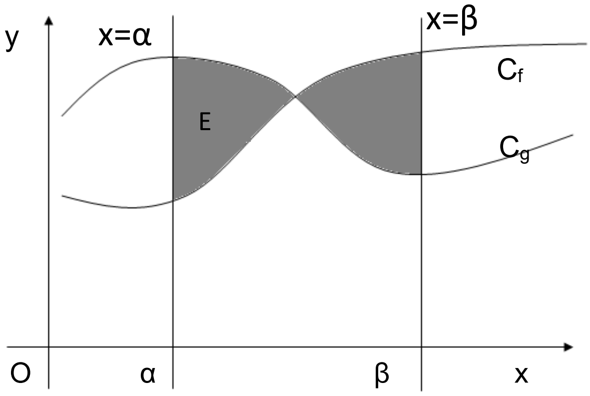
Ε=$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, αν f(x)≥0 και

Ε=-$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, αν f(x)≤0.

Γενικά $E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.



2. Εάν f,g συνεχείς στο [α,β], τότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f,C_g και των ευθειών x=α, x=β δίνεται από την σχέση $E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx$

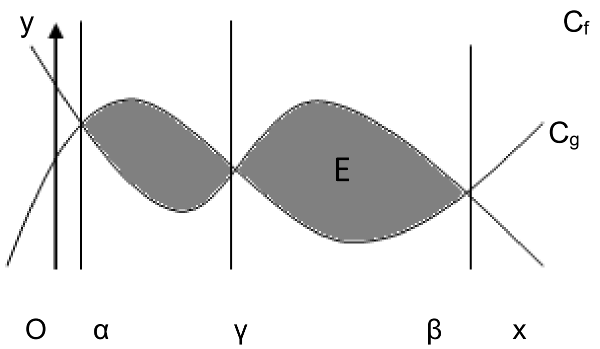


.

3. Εάν f,g συνεχείς στο [α,β], τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g, δίνεται από την σχέση:

$E = \int_{\alpha}^{\gamma} |f(x) - g(x)|dx + \int_{\beta}^{\gamma} |f(x) - g(x)|dx + \ldots$,

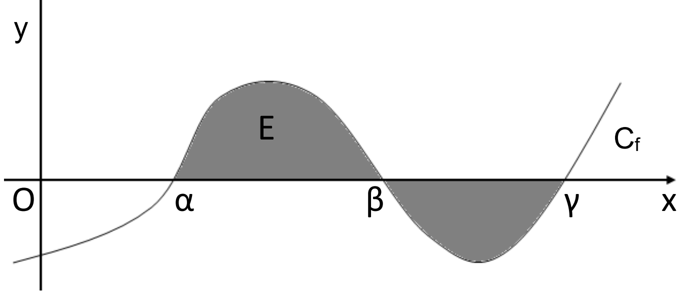
όπου α, γ, β, … είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=g(x), δηλαδή οι τετμημένες των σημείων τομής τους.



4. Εάν f συνεχής σε διάστημα Δ, τότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f της f και τον άξονα x'Ox, δίνεται από την σχέση:

$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx + \int_{\beta}^{\gamma} |f(x)|dx + \ldots$,

όπου α, β, γ, … είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0, δηλαδή οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄Ox.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x-5, & αν\ 1<x\le 2\\ x-1, & αν\ 2<x<4\\ 3, & αν\ 4<x\le 6\end{cases}$. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται:

a) $\int_1^2 f(x)dx$.
b) $\int_3^2 f(x)dx$.
c) $\int_3^4 f(u)du$.
d) $\int_3^5 f(v)dv$.
e) $\int_0^2 f(\omega)d\omega$.

$\int_6^6 f(t)dt$.

2. **α)** Να δείξετε ότι $\int_0^{\pi/2} ημ^ν x dx=\int_0^{\pi/2} συν^ν x dx$, για κάθε ν∈$N^*$.

β) Να δείξετε ότι $\int_0^{\pi/2} ημ^2 x dx=\int_0^{\pi/2} συν^2 x dx=\frac{\pi}{4}$.

3. Να δείξετε ότι $\int_{-2}^{2}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2+1}dx=0$.

4. Υπολογίστε το $\int_{-1}^{1}|x|dx$.

5. Να δείξετε ότι $\int_{\pi}^{5\pi/4}\frac{ημ2χ}{συν^2χ}dχ=\int_0^{\pi/4}\frac{ημ2χ}{συν^2χ}dχ$.

6. Να δείξετε ότι $\int_0^1\sqrt{x}dx\ge\int_0^1 x^3dx$.

7. Να δείξετε ότι $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ημx}{x^2+1}dx\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2+1}dx$.

8. Να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{ημx}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}$.

9. Να δείξετε ότι $\int_2^5\frac{1}{x^2+1}dx\le\int_2^5\frac{x}{10}dx$.

10. **α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x)=e^{x^2-x}, x∈[0,2].

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

11.1. $\int_0^1 2^x e^x dx$ **11.2.** $\int_0^{\pi/3}(συνx-xημx)dx$ **11.3.** $\int_1^e\frac{1-\ln x}{x^2}dx$

12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

12.1) $\int_0^2 3x^5dx$
12.2) $\int_0^{\pi}(x^4+3συνx)dx$
12.3) $\int_1^e\frac{x^3+1}{x}dx$
12.4) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{ημ^2xσυν^2x}dx$
12.5) $\int_0^1(x^3+x)^2dx$
12.6) $\int_1^e\frac{x^2+x+1}{x}dx$
12.7) $\int_0^1\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$
12.8) $\int_2^3\sqrt{x^2-4x+4}dx$
12.9) $\int_0^{\pi}(e^x+2ημx)dx$
12.10) $\int_1^2\frac{x-3}{x^4}dx$
12.11) $\int_1^e e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$
12.12) $\int_{-\pi}^{\pi}\left(συν\frac{x}{2}-ημ\frac{x}{2}\right)^2dx$
12.13) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}συν^2\frac{x}{2}dx$
12.14) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}εφ^2xdx$
12.15) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{3-5σφ^2x}{συν^2x}dx$
12.16) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{συν^2ω-ημ^2ω}{συνω-ημω}dx$
12.17) $\int_0^2\frac{x^2-2x+1}{x-1}dx$
12.18) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2ημxσυνx}{ημx}dx$
12.19) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{2συν^2x-1+ημ^2x}$
12.20) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{συν^2x-ημ^2x}{συν^2xημ^2x}dx$
12.21) $\int_0^{\pi/4}\frac{1+συν^2x}{2συν^2x}dx$

13. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

13.1) $\int_0^{\pi}ημ\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$
13.2) $\int_{-\pi}^{\pi/2}συν3tdt$
13.3) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{ημχ}συνχdχ$
13.4) $\int_4^{e+3}\frac{dx}{x-3}$
13.5) $\int_{-1}^{0}e^{2x+1}dx$
13.6) $\int_{5/2}^{7/2}\frac{dx}{(x-3)^2}$
13.7) $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}xσυν\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx$
13.8) $\int_{9\pi/4}^{7\pi/3}εφxdx$
13.9) $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$
13.10) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$
13.11) $\int_{7\pi/4}^{0}\frac{ημx}{συν^3x}dx$
13.12) $\int_{-1}^{1}x\sqrt{x^2+1}dx$
13.13) $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$
13.14) $\int_0^1\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx$
13.15) $\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}σφxdx$
13.16) $\int_0^{\sqrt{\pi}}xημ\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx$
13.17) $\int_0^1\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$
13.18) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}συν^3xdx$

13.19) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^7\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^3\omega\, d\omega$

13.20) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

13.21) $\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 + 5)(3x^2 + +4x)dx$

13.22) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sqrt[3]{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$

13.23) $\int_1^e \frac{x^3 + \ln x}{x} dx$

13.24) $\int_4^9 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

13.25) $\int_0^1 \frac{3xdx}{x^2+1}$

13.26) $\int_{-1}^{1} x^3(2 - 3x^4)^3 dx$

13.27) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{4+x\ln x} dx$

13.28) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

13.29) $\int_{1/2}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

13.30) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2-1} x dx$

13.31) $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} d\alpha$

13.32) $\int_{-8}^{-3} \frac{3d\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon}}$

13.33) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

13.34) $\int_0^{\pi/2} \alpha^{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx$

13.35) $\int_{1/e}^{e^7} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$

13.36) $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt[5]{5 - x^2} dx$

13.37) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \eta\mu^3 6x\sigma\upsilon\nu 6x dx$

13.38) $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2x+3}{2x+1} dx$

13.39) $\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

13.40) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x} dx$

13.41) $\int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx$

13.42) $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

13.43) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} dx$

13.44) $\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)dx}{x}$

13.45) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu x}{\eta\mu^3 x} dx$

13.46) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

13.47) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2xdx}{x^2+1}$

13.48) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{4-x^2}$

13.49) $\int_0^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx$

13.50) $\int_{\sqrt[3]{7}}^{2} (x^3 - 7)^8 3x^2 dx$

13.51) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$

13.52) $\int_{-3}^{e-4} \frac{x}{x+4} dx$

13.53) $\int_0^{\pi/4} (\varepsilon\varphi^2 x + +\varepsilon\varphi^4 x)dx$

13.54) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4}$

14. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

14.1) $\int_3^{e+2} \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} dx$

14.2) $\int_0^1 \frac{2x-1}{x-2} dx$

14.3) $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x dx$

14.4) $\int_0^{\frac{c(e-1)}{e+1}} \frac{dx}{c^2-x^2}$, c∈IR.

14.5) $\int_3^{e+2} \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$

14.6) $\int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-x-2} dx$

14.7) $\int_2^{e+1} \frac{x-3}{x^2-2x+1} dx$

14.8) $\int_2^e \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

14.9) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$

14.10) $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$

14.11) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1} dx$

14.12) $\int_1^{e-1} \frac{2-x}{x^2+x} dx$

14.13) $\int_1^{e-2} \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2} dx$

15. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

15.1) $\int_{\frac{8}{7}}^{\frac{27}{26}} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \frac{1}{x(x-1)} dx$

15.2) $\int_{-\frac{1}{7}}^{-\frac{1}{26}} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \frac{1}{x(x-1)} dx$

15.3) $\int_2^5 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$

15.4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

15.5) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1}}$

14.5) $\int_0^{14/9} \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx$

16. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

16.1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{10} x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

16.2) $\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^5\varphi d\varphi$

16.3) $\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^5\varphi d\varphi$

16.4) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sigma\upsilon\nu^5\chi}{\sqrt[3]{\eta\mu\chi}} d\chi$

16.5) $\int_{7\pi/4}^{2\pi} \frac{\eta\mu^5 y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}} dy$

16.6) $\int_{\pi}^{3\pi/2} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx$

16.7) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$

16.8) $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

16.9) $\int_{\pi/2}^{\pi} \eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

16.10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

17. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

17.1) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x\eta\mu x dx$

17.2) $\int_0^1 xe^x dx$

17.3) $\int_1^e x^\nu \ln x\, dx, \nu \in N^*$

17.4) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \chi\sigma\upsilon\nu\chi d\chi$

17.5) $\int_0^1 e^x x^2 dx$

17.6) $\int_{\pi/4}^{\pi} e^x \eta\mu x dx$

17.7) $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$

17.8) $\int_e^{e^2} \ln x\, dx$

17.9) $\int_0^3 e^{3x} x^2 dx$

17.10) $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu 3x dx$

17.11) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x} dx$

17.12) $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x^3} dx$

17.13) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

Παρατήρηση: $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)'$

17.14) $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \eta\mu x \eta\mu 3x dx$

17.15) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{5x}\sigma\upsilon\nu 4x dx$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

18. Θέμα 3ο 2004: Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο IR και $f(0)=f(^3/_2)=0$.

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,{}^3/_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.
2. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)dx$.
3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} I(\alpha)$.

19. Θέμα 4ο 2008: Έστω f συνεχής συνάρτηση στο IR για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$.

1. Να δείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$. Μονάδες 8
2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δυο φορές παραγωγίσιμη στο . Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h} = g''(x)$. Μονάδες 4
3. Αν για την συνάρτηση f του (1) ερωτήματος και την συνάρτηση g του δεύτερου ερωτήματος ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε:
   - i. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$. Μονάδες 10
   - ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1». Μονάδες 3

20. Θέμα Γ 2010 ερώτημα Γ4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in$IR. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$. Μονάδες 7

21. Θέμα Δ 2016: Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\eta\mu x dx = \pi$.
- f(IR)= IR και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x\in$IR.

Δ.1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3) Μονάδες 7

Δ.2.

Δ.2.1. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. (μονάδες 4)

Δ.2.2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ.3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. Μονάδες 6

Δ.4. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$. Μονάδες 6

22. Θέμα Δ 2018: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in$IR με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής . Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2\in$IR, με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2. Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2). Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = 2$, να αποδείξετε ότι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$. Μονάδες 9

23. ΘΕΜΑ Γ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2023: Δίνεται η συνάρτηση $f : [1,2] \to$ IR, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f'(2)=1$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f:

- i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ε_1): $y = -x + 2$ (μονάδες 3) και
- ii. εφάπτεται στην ευθεία (ε_2) : $y = x$ (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε x∈(1,2). **Μονάδες 7**

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

i. f(x) ≥ 2x – 2, για κάθε x∈[1,2] (μονάδες 2).

ii. 1 < $\int_1^2 f(x)dx$ < $\frac{3}{2}$ (μονάδες 4). **Μονάδες 6**

24. ΘΕΜΑ Δ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ (λόγω πλημμυρών) 2023: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : IR → IR για την οποία ισχύει $x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ = ημx, για κάθε x ≠ 0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι f(x) = $\begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο O(0,0). Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞. Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} f(x)συνx dx$. Μονάδες 6

25. ΘΕΜΑ Δ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2022: Δίνεται η συνάρτηση με f(x) = $\begin{cases} -x^3+3x+1, & -1 \le x \le 0 \\ x^x, & 0 < x \le \frac{2}{e} \end{cases}$;

Δ1. Να αποδείξετε ότι η είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. **Μονάδες 6**

Δ2. i) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε α, β∈$\left[-1, \frac{2}{e}\right]$, υπάρχει ξ∈$\left[-1, \frac{2}{e}\right]$, τέτοιο ώστε f(ξ) = $\frac{2f(α)+3f(β)}{5}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x)dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. **Μονάδες 6**

26. END

<u>ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ</u>

27. 23219-4: Έστω συνάρτηση f: IR→ IR παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in$ IR. (Μονάδες 8)

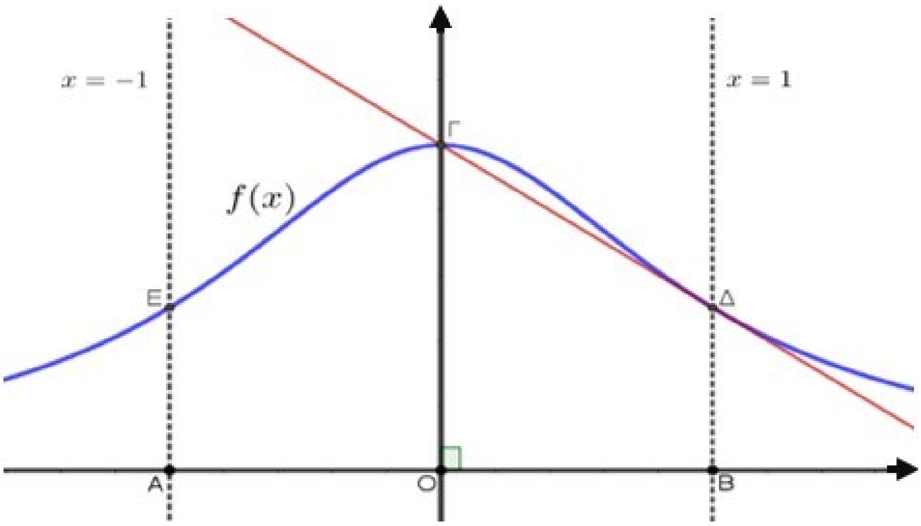
β) Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx > 1$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 x f'(x)dx < 1$. (Μονάδες 6)

28. 23955-4: Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in$ IR και οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx > \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

29. 23957-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\frac{lnx}{x}f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2\cdot lnx\cdot f(x)+xe^x}{x(f(x)+e^x)}dx$. (Μονάδες 10)

30. 24758-4: Έστω συνάρτηση f: IR → IR παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ IR. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ και για $x = -1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$. (Μονάδες 6)

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$. (Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx \leq 0$. (Μονάδες 6)

31. 24770-4: Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x) = ln(e^x-1) + x - 1,\ x > 0}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

β) **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o = ln\,2$. (Μονάδες 5)

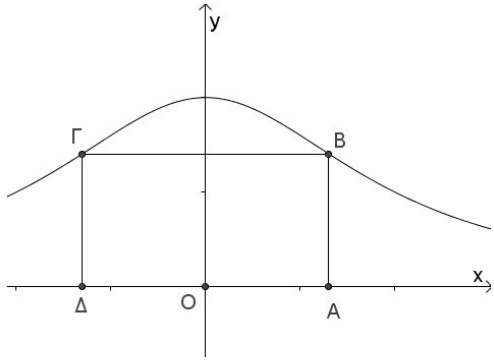
ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $ln(e^x-1) \leq 2x - ln4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}\right)\mathrm{dx}$. (Μονάδες 8)

32. 24771-4: Έστω f: IR → IR συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $(x^2+1)f'(x) + \frac{2x}{x^2+1} = 0$ για κάθε $x \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x \in$ IR. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης $\alpha, \alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}, \alpha > 0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = ln\,2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx = ln\sqrt{2}$.

(Μονάδες 6)

33. 25747-4: Δίνεται συνάρτηση f: $[0,2] \to$ IR η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0,2]$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x \in [0,2]$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)\,dx$. (Μονάδες 6)

34. 25757-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

1) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 9)

2) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $0 \le f(x) \le 1 - x$. (Μονάδες 7)

3) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 9)

35. 25766-4: Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο IR.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad f(0) = 1 \qquad \text{και} \qquad f(2) = 5$$

τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$. (Μονάδες 5)

36. 26184-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_{1}^{e^2} f(x)dx$. (Μονάδες 9)

37. 27321-4: Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς. Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = axe^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0,1)$ και $a \in (1, +\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y;

(Μονάδες 9)

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f. Να αποδείξτε ότι: $F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$. (Μονάδες 9)

38. 27322-4: Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$, όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στον περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim_{t \to +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot ln(T(t))dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$. (Μονάδες 10)

39. 27668-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-\lambda)(x-1), x \in$ IR με $1 < \lambda < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο IR. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4-x)$, για κάθε $x \in$ IR, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

40. 29549-4: Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR → IR με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε $f'(0) = f(0) = 0$ και $\int_0^{\pi}\big(f(x) + f''(x)\big)\eta\mu x dx = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = -\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$. (Μονάδες 7)

β) $f(\pi) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής. (Μονάδες 10)

41. 31551-4: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$ και $\varphi(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \varphi(x)dx = 0$. (Μονάδες 5)

42. 32225-4: Για μια συνεχή συνάρτηση f: $[-1, +\infty)$ →IR ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x + 1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,
- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x\big(\sqrt{x+1} - 1\big), x \geq -1$. (Μονάδες 7)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x + 1) - f(x), x \in (-1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024}\big(f(x+1) - f(x)\big)dx < \int_{2023}^{2024}\big(f(x+2) - f(x+1)\big)dx$.

Μονάδες 6

43. 29837 ΘΕΜΑ 4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου. Μονάδες 9

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$. Μονάδες 6

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 5

δ) Αν $\varphi(x) = (f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x)dx$.

Μονάδες 5

44. 33593 ΘΕΜΑ 2: Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και $\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

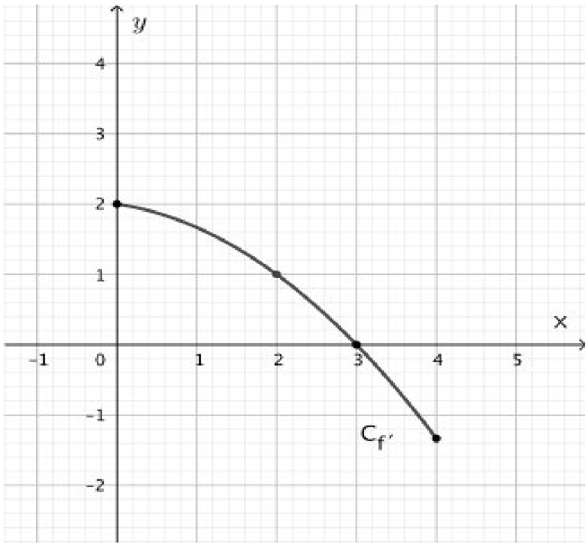
α) $\int_3^2 f(x)dx$. Μονάδες 5

β) $\int_3^7 f(x)dx$. Μονάδες 6

γ) $\int_7^2 f(x)dx$. Μονάδες 6

δ) $\int_1^3 (f(x) - x)dx$. Μονάδες 8

45. 26366 ΘΕΜΑ 2: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $f\,'$ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0{,}4]$.



α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o = 2$; Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0{,}3]$. Μονάδες 8

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$. Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f\,''(x)dx$. Μονάδες 5

46. 33998 ΘΕΜΑ 4: Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot ln\frac{4}{5}dt$. Μονάδες 6

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot ln\frac{4}{5}$, για κάθε $t > 0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου. Μονάδες 12

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t \in 0, +\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο. Μονάδες 7

47. 34565 ΘΕΜΑ 4: Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1 < \alpha < \beta$ και την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $[\alpha, \beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{g(x)} = \frac{\mathrm{f(x)+\lambda\alpha-f(\alpha)}}{\mathrm{x}}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ ώστε $cf'(c) - f(c) - \lambda a + f(a) = 0$. Μονάδες 6

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c) \neq \lambda$, να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c, f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. Μονάδες 7

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{x \cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)} dx$ ισούται με -1.

Μονάδες 7

48. 35245 ΘΕΜΑ 4: Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}, x \in \mathrm{IR}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 4

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης. Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 6

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$. Μονάδες 7

49. 36816 ΘΕΜΑ 4: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_o = 0$, για την οποία ισχύει $xf(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $f(0)$. Μονάδες 4

β) Να βρείτε τον τύπο της f. Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Μονάδες 9

δ) Να από δείξετε ότι $\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \leq \frac{1}{4}$. Μονάδες 8

50. END.