ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=2x^2-x+5$ που διέρχεται από το σημείο της $A(3, f(3))$.

2. Ομοίως της $f(x)=x\ln x$, στο σημείο της με τετμημένη e.

3. Ομοίως της $f(x)=\frac{x-1}{x}$, στο σημείο της με τεταγμένη 1/2.

4. Ομοίως της $f(x)=-x^3+4x$, στο σημείο της $A(x_o,0)$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(x_o, f(x_o))$, όταν $f´(x_o)=3$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=ημx$, $x\in(0,3π/2)U U(3π/2,3π)$ στο σημείο της $A(x_o,f(x_o))$, όταν $f´(x_o)=0$.

7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=e^x$, που σχηματίζει γωνία π/4 με τον θετικό ημιάξονα Ox.

8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=-x^2$, που σχηματίζει γωνία π/3 με τον άξονα yOy´ (δυο περιπτώσεις).

9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=-x^2+3x-5$, που είναι παράλληλη στην ευθεία $x+y+5=0$.

10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3-x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $x+2y+6=0$.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=\ln x$, που είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2e)$ και $B(2, e)$.

12. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=e^xημx$, $x\in[0,π/2)U (π/2, π]$, που είναι παράλληλη στον άξονα xOx´.

13. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3-7x+6$, στα σημεία που αυτή τέμνει τους άξονες.

14. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3$ που διέρχεται από το σημείο $A(-1, -5)$.

15. Να δείξετε ότι η ευθεία $8x+y-11=0$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^4-6x^2+8$.

16. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x^2-4x+5$ και $g(x)=-x^2+2x+2$, έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

17. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2+4x+33$ και $g(x)=-x^2-1$.

18. Να βρείτε το $α\in IR$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=\frac{1}{9}(αx-x^3)$ στα σημεί α που αυτή τέμνει τον άξονα xOx´, να σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία 45^0.

19. Έστω $f(x)=\frac{αx^3+β}{x}$. Να βρείτε τα $α, β\in IR$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$ και η εφαπτομένη της στο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης -4.

20. Έστω $f(x)=αx^2+βx+γ$. Να βρείτε τα $α, β, γ\in IR$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο της $B(2, -1)$ να είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $x-3y-6=0$.

21. Βρείτε τα $α, β\in IR$, ώστε η εφαπτομένη C_f της

$$f(x)=\begin{cases} xημx+α, & x\le 0 \\ x^2+(β-2)x+2, & x>0 \end{cases}$$

στο σημείο με $x_o=0$ να ορίζεται.

22. Έστω $f(x)=x^3+αx^2+βx+γ$. Να βρείτε τα $α, β, γ\in R$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$,$B(1,-3)$ και οι εφαπτομένες της στα σημεία A και B να είναι κάθετες μεταξύ τους.

23. **23937-2:** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3+x-1, x\in IR.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $A(1, f(1))$. (Μονάδες 9)

24. **24757-2:** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία $45°$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\,'(0)=1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$. (Μονάδες 9)

25. **25762-2:** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x, x\le 0 \\ ημx, x>0 \end{cases}.$$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $f'(0)=1$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$. (Μονάδες 7)

26. **26630-2:** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^x & , \text{αν } x<0 \\ 1 & , \text{αν } x=0 \\ \text{συν}x & , \text{αν } x>0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 7)

27.28302-2: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $gof: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(gof)(0)$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

28.28340-4: Έστω μια συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -x + 1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων fog και gof, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(fog)'(2)$ και $(gof)'(-1)$. (Μονάδες 8)

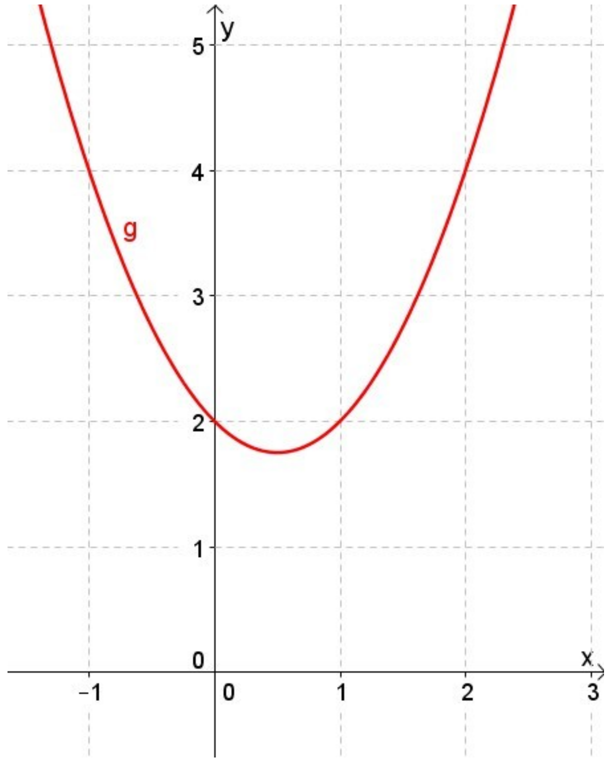
γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

29.33816-2: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2 - x + 2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$. Μονάδες 8

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(1,2)$. Μονάδες 8

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y = x + 1$.



Μονάδες 9

30.33632 ΘΕΜΑ 2: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x, x \le 0 \\ -x^2 + 1, x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o = 0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Μονάδες 13

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$. Μονάδες 12

31.ΘΕΜΑ Δ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2021: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$ και συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + αx$ όπου $α \in \mathbb{R}$, για την οποία το όριο:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{-g(x)} + +αx\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $α = -1$. Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$ είναι η ευθεία (ε): $y = x + 1$ (μονάδες 3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3). Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k}+\frac{f(x)-g(x)}{x-k-1}=0$$

με k∈IR – {1}, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1). Μονάδες 7

32.END.