ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. *Ορισμός*: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της** f ή απλά **παράγωγος της** f.

2. *Παράγωγος σταθερής συνάρτησης f(x)=c με* $c\in\mathbb{R}$: $(c)'=0$.

   Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:
   $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$ οπότε:
   $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0.$$
   Άρα $(c)'=0$.

3. *Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης f(x)=x*: $(x)'=1$.

   Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:
   $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\cancel{\frac{x-x_0}{x-x_0}}=1$ οπότε:
   $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1.$$
   Άρα $(x)'=1$.

4. *Παράγωγος της συνάρτησης* $f(x)=x^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$: $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

   Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:
   $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}$
   $=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^\nu)}{x-x_0}$
   $=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^\nu$ οπότε:
   $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
   $$=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^\nu)$$
   $$=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}$$
   $$=\nu\cdot x_0^{\nu-1}.$$
   Άρα $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

5. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$.

   Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:
   $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$
   $=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$
   $=\frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$
   $=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$ οπότε:
   $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
   $$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$
   $$=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}$$
   $$=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$
   Άρα $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. $(ημx)'=συνx$, $(συνx)'=-ημx$, $(e^x)'=e^x$ και $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$.

7. *Παράγωγος αθροίσματος*: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
   $$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

   Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:
   $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$
   $=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$
   $=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ οπότε:
   $$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}$$
   $$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$
   $=f'(x_0)+g'(x_0)$.
   Άρα $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

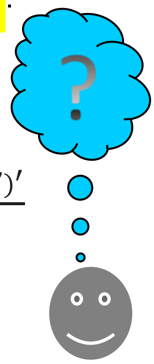
8. *Παράγωγος γινομένου*:
   $$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$
   Παράγωγος γινομένου τριών συναρτήσεων:
   $(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))'=$
   $=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$.

   Απόδειξη: $(f(x)g(x)h(x))'=$
   $=(f(x)g(x))'h(x)+f(x)g(x)h'(x)=$
   $=(f'(x)g(x)+f(x)g'(x))h(x)+f(x)g(x)h'(x)=$
   $=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$.
   $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$, $c\in\mathbb{R}$.

9. *Παράγωγος πηλίκου*:
   $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

10. $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

    Απόδειξη: $(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'$
    $=\frac{(1)'x^\nu-1\cdot(x^\nu)'}{x^{2\nu}}$
    $=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}$
    $=-\nu x^{\nu-1-2\nu}$
    $=-\nu x^{-\nu-1}$.



11. $(εφx)'=\frac{1}{συν^2x}$.

    Απόδειξη: $(εφx)'=\left(\frac{ημ\,x}{συν\,x}\right)'$
    $=\frac{(ημ\,x)'συν\,x-ημ\,x(συν\,x)'}{συν^2x}$
    $=\frac{συν^2x+ημ^2x}{συν^2x}=\frac{1}{συν^2x}$.

12. $(σφx)'=-\frac{1}{ημ^2x}$.

13. *Παράγωγος σύνθεσης*:
$(fog)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

14. *Κανόνας της αλυσίδας*: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

15. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\in R$.
Απόδειξη: $(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'$
$=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'$
$=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}$
$=\alpha x^{\alpha-1}$.

16. $(\alpha^{x})' = \alpha^{x}\ln\alpha$, $0<\alpha\neq 1$.
Απόδειξη: $(\alpha^{x})'=(e^{x\ln\alpha})'$
$=e^{x\ln\alpha}\cdot(x\ln\alpha)'$
$=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha$.

17. $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, $x\in R^*$.
☛ $x>0$ τότε $|x|=x$ και
$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.
☛ $x<0$ τότε $|x|=-x$ και
$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}$.
Άρα $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in R^*$.

18. ***Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων***:

f(x)	f΄(x)
$f(x)=c$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^{\nu}$	$f'(x)=\nu x^{\nu-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^{x}$	$f'(x)=e^{x}$
$f(x)=\ln x$, $x>0$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x)=-\eta\mu x$
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1+\varepsilon\varphi^2 x$
$f(x)=\sigma\varphi x$	$f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}=-1-\sigma\varphi^2 x$
$f(x)=\alpha^{x}$	$f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$
$f(x)=\log_{\alpha}x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

19. ***Κανόνες παραγώγισης***:

a. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$.
(*ισχύει και με περισσότερες συναρτήσεις*).

b. $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
$[f(x)g(x)h(x)]'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+$
$+f(x)g(x)h'(x)$.

(*Ομοίως και με περισσότερες συναρτήσεις*).

c. $[cf(x)]'=cf'(x)$, όπου c=σταθερός.

d. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{x^2}$

e. $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

20. ***Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων***:

$$(f^{\nu}(x))'=\nu f^{\nu-1}(x)\cdot f'(x)$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}f'(x)$$

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)},\ f(x)>0$$

$$(\eta\mu f(x))'=f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)$$

$$(\sigma\upsilon\nu f(x))'=-f'(x)\cdot\eta\mu f(x)$$

$$(\varepsilon\varphi\, f(x))'=\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$$

$$(\sigma\varphi\, f(x))'=-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$$

$$\left(\alpha^{f(x)}\right)'=\alpha^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)$$

$$(\lambda o\gamma_{\alpha} f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a},\ f(x)>0$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

21. Υπάρχει περίπτωση να παραγωγίζεται το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο ή το πηλίκο δυο συναρτήσεων σε κάποιο σημείο, χωρίς να παραγωγίζονται ξεχωριστά οι συναρτήσεις. Πχ οι συναρτήσεις $f(x)=|x|$ και $g(x)=3-|x|$ δεν παραγωγίζονται στο x=0, το άθροισμά τους όμως παραγωγίζεται στο x=0.

22. Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, η παράγωγος στο σημείο αλλαγής του τύπου, βρίσκεται με τον ορισμό.

23. Συμβολισμοί Lagrange:

- Συνάρτηση πρώτης παραγώγου: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
- Τιμή της f' σε σημείο x_0: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$
- Συνάρτηση δεύτερης παραγώγου: $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$
- Συνάρτηση τρίτης παραγώγου: $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$
- Συνάρτηση ν-στής παραγώγου: $f^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}$

24. Για την ν-στή παράγωγο μιας συνάρτησης, πάντα επαγωγή.
25. Η παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης ν-στού βαθμού είναι πολυώνυμο ν-1 βαθμού.
26. Όταν παραγωγίζουμε μια συναρτησιακή σχέση ως προς x, θεωρούμε το x μεταβλητή και το y σταθερό.
27. Για να βρούμε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f και g που έχουν διαφορετικά σημεία επαφής $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,g(x_2))$, βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των αντίστοιχων συναρτήσεων στα σημεία Α και Β, εφαρμόζοντας τον τύπο της εξίσωσης εφαπτομένης. Έστω $y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $y = \lambda_2 x + \beta_2$ οι εξισώσεις αυτές. Αφού πρόκειται για την ίδια ευθεία, ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, απ' όπου υπολογίζονται τα x_1 και x_2 και κατ' επέκταση η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

iii) $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{\ln x}$

iv) $f(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$

v) $f(x) = \frac{xe^x}{x^2+1}$

vi) $f(x) = \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}$

vii) $f(x) = \frac{x\ln x}{x^2+1}$

viii) $f(x) = xe^x\varepsilon\varphi x$

ix) $f(x) = \frac{1-x\ln x}{1+x\ln x}$

x) $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$

2) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

ii) $f(x) = xe^{\sqrt{1-x}}$

iii) $f(x) = e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x} + 1)$

iv) $f(x) = \ln^2\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)$

v) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 - \ln x^2}$

vi) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x}$

vii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)$

viii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)^2$

ix) $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

x) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$

xi) $f(x) = e^{-2x} + e^{-x}$

3) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $f(x) = x^{\ln x}$

iii) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

4) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο $4^{ου}$ βαθμού και ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 οι ρίζες του, να δείξετε ότι:
$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}+\frac{1}{x-\rho_4}.$$
5) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού και ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες του, διαφορετικές ανά δυο, να δείξετε ότι:
$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=0.$$
6) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με α, β, γ, $\delta\in R$, τέτοιο ώστε $P(x)-P'(x)=x^4-4$, για κάθε $x\in \mathbb{R}$.

7) Εάν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}^*$, με:
- **i)** $g(x)=xf(x)$, για κάθε $x\in \mathbb{R}^*$,
- **ii)** $g(1)=14$ και
- **iii)** η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, με $g'(1)=17$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+2x^2-x$. Να βρείτε το $\alpha\in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$, να:
- **i)** είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1): $y=3x+1$
- **ii)** είναι κάθετη στην ευθεία (ε_2): $y=-2x+1$
- **iii)** σχηματίζει γωνία 135^0 με τον ημιάξονα Ox.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=συν2x$
- **i)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\pi/8$,
- **ii)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

10) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- **i)** Εάν f άρτια, τότε f΄ περιττή,
- **ii)** Εάν f περιττή, τότε f΄ άρτια,
- **iii)** Εάν f περιοδική με περίοδο Τ, τότε f΄ περιοδική με περίοδο επίσης Τ.
- **iv)** Αν f περιττή και στο $x_0=1$ έχει κλίση 2008, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=-1$.

11) Εάν f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f(x_0)=2$ και $[f^3(x_0)]'=3$, να δείξετε ότι $f'(x_0)=1/4$.

12) Εάν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(2x+3)=x^5$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την $f'(x)$.

13) Εάν $y=xημx$, $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $(y'''+y')^2+(y''+y)^2=4$.

14) Εάν $y=xe^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $y''=4y'-4y$.

15) Εάν f δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(\ln x)=e^x+\ln x$, $x>0$, να βρείτε την $f''(0)$.

16) Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$, για τα οποία ισχύει $P(x)=[P'(x)]^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

17) **α)** Να δείξετε ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει ρίζα τον αριθμό $x=\rho$ με πολλαπλότητα κ ($\kappa\in N$, $\kappa>1$), τότε το $x=\rho$ είναι ρίζα της f΄ με πολλαπλότητα κ-1

β) Υπολογίστε τα α, $\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $3x^3-5x^2+(\alpha+1)x-\beta=0$ να έχει διπλή ρίζα το $x=1$.

18) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^3+2x+1$ δια $(x-1)^2$.

19) Έστω f,g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(x)g(x)e^x+\ln x=xe^{x-1}$, για κάθε $x>0$, να δείξετε ότι:
$$\frac{f'(1)}{g'(1)}=-\frac{f(1)}{g(1)}.$$
20) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}2x^2ημ\frac{1}{x^2} & ,\text{αν } x\in R*\\ 0 & ,\text{αν } x=0\end{cases}$.
- **i)** Να δείξετε ότι $f'(x)=\begin{cases}4x\left(ημ\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}συν\frac{1}{x^2}\right) & ,\text{αν } x\in \mathbb{R}*\\ 0 & ,\ \text{αν } x=0\end{cases}$,
- **ii)** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2ημ\frac{1}{x^2}\right)=f'(0)$,
- **iii)** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=2\pi^2ημ\frac{1}{\pi^2}$.

21) Η συνάρτηση $f:R\to R$, είναι παραγωγίσιμη με $f(1)=3$ και $f(x^3)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)-3}{x-1}$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a_1^x+a_2^{2x}+\ldots+a_\nu^{\nu x}$, όπου α_1, α_2, …, α_ν θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $f'(0)=0$, να δείξετε ότι $a_1a_2^2\ldots a_\nu^\nu=1$.

23) Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x^3)=f^3(x)$, $f(x)>0$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

24) Έστω $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Να δείξετε ότι:
- **i)** $f^2(x)+f'(x)=1$

ii) $f''(x)=-2f(x)f'(x)$

25) Εάν για την συνάρτηση f ισχύει $f(0)=0$, $f'(x)\neq 0$ και $f'(x)=3+f^3(x)$, για κάθε $x\in$IR, να δείξετε ότι:

i) $\frac{f''(x)}{f'(x)}=3f^2(x),\ x\in$ IR.

ii) $f''(0)=0$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

26) Έστω f παραγωγίσιμη στο R, 1-1 και τέτοια ώστε $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in$IR. Να δείξετε ότι $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x}$.

(*Υπόδειξη*: $f(f^{-1}(x))=x$)

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ2x+2συν^2x$, $x\in(0,2π)$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $2x-y+5=0$.

28) Υπολογίστε τα $α,β\in$R, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{x^2+x+1}{2x}$ και $g(x)=x^2+αx+β$, να έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, κάθετη στην ευθεία $2x-3y+5=0$.

29) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄Ox.

30) Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$, $x>1$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $x-y+5=0$.

31) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ και $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x$. Αν η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ τέμνει τον άξονα xOx΄ στο A, να δείξετε ότι η προβολή του MA στον άξονα xOx΄ έχει σταθερό μήκος.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε τυχαίο σημείο της M, τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B, να δείξετε ότι το M είναι μέσο του AB.

34) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $c(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $s(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $t(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{s(x)}{c(x)}$ και $σ(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{c(x)}{s(x)}$, $x\in$IR. Να δείξετε ότι:

i) $s(0)=0$, $c(0)=1$, $t(0)=0$.

ii) $s(-x)=-s(x)$ και $c(-x)=c(x)$

iii) $t(-x)=-t(x)$ και $σ(-x)=-σ(x)$

iv) $c^2(x)-s^2(x)=1$

v) $c(x)+s(x)=e^x$, $c(x)-s(x)=e^{-x}$

vi) $c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)$

vii) $c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)$

viii) $s(x+y)=s(x)c(y)+c(x)s(y)$

ix) $s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)$

x) $t(x+y)=\frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}$

xi) $t(x-y)=\frac{t(x)-t(y)}{1-t(x)t(y)}$

xii) $c(x)+c(y)=2c\left(\frac{x+y}{2}\right)c\left(\frac{x-y}{2}\right)$

xiii) $c(x)-c(y)=2s\left(\frac{x+y}{2}\right)s\left(\frac{x-y}{2}\right)$

xiv) $c(2x)=c^2(x)+s^2(x)$

xv) $s(2x)=2s(x)c(x)$

xvi) $t(2x)=\frac{2t(x)}{1+t^2(x)}$

xvii) $c(2x)=\frac{1+t^2(x)}{1-t^2(x)}$

xviii) $c(x)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

xix) $s(x)=\frac{t(x)}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

Για την παράγωγο των παραπάνω συναρτήσεων ισχύουν τα:

i) $c'(x)=s(x)$ και $s'(x)=c(x)$

ii) $t'(x)=1/c^2(x)=1-t^2(x)$

iii) $σ'(x)=-1/s^2(x)=1-σ^2(x)$

35) 31743 ΘΕΜΑ 2: Δίνεται η συνάρτηση f: IR→IR με τύπο $f(x)=xημx+4$ για κάθε $x\in$ IR.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{π}{2}\right)$. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $φ$, με $φ(x)=f'(x)-\frac{1}{3}$, $x\in$ IR ισχύουν $φ(0)<0$ και $φ(\frac{π}{2})>0$.

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $φ(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\frac{π}{2})$.

Μονάδες 9

36) 33994 ΘΕΜΑ 3: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR→IR τέτοια, ώστε $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{ημx}\right)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f\,'(0) = 0$. Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $\big(0, g(0)\big)$. Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. Μονάδες 5

37)34437 ΘΕΜΑ 2: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ln\,x + 2x,\ x > 0$ και $g(x) = e^{x+2},\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ **.** Μονάδες 9

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1. Μονάδες 8

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g. Μονάδες 8

38)END.