ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρ-τήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

ii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{\ln x}$

iv) $f(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$

v) $f(x)=\dfrac{xe^x}{x^2+1}$

vi) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}$

vii) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2+1}$

viii) $f(x)=xe^x\varepsilon\phi x$

ix) $f(x)=\dfrac{1-x\ln x}{1+x\ln x}$

x) $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$

Λύση:

i) $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

ii) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)'=-\dfrac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

$=-\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

iii) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)'=-\dfrac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}+\dfrac{(\ln x)'}{\ln^2 x}$

$=-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}+\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

iv) $f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x\ln x}\right)'=\dfrac{(x-1)'x\ln x-(x-1)(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}$

$=\dfrac{x\ln x-(x-1)\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)}{x^2\ln^2 x}$

$=\dfrac{x\ln x-(x-1)\left(\ln x+x\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\ln^2 x}$

$=\dfrac{x\ln x-(x-1)(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x}$

$=\dfrac{x\ln x-x\ln x-x+\ln x+1}{x^2\ln^2 x}$

$=\dfrac{1-x+\ln x}{x^2\ln^2 x}$.

v) $f'(x)=\left(\dfrac{xe^x}{x^2+1}\right)'$

$=\dfrac{\left(xe^x\right)'(x^2+1)-(x^2+1)'xe^x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{\left((x)'e^x+x(e^x)'\right)(x^2+1)-2x\cdot xe^x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)(x^2+1)-2x^2e^x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{x^2e^x+e^x+x^3e^x+xe^x-2x^2e^x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2e^x+e^x+x^3e^x+xe^x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{e^x(x^3-x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}$.

vi) $f'(x)=\left(\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\right)'$

$=\dfrac{(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$

$=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x)(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$

$=\dfrac{x\eta\mu x(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)(2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$

$=\dfrac{2x\eta\mu^2x+2x\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$

$=\dfrac{2x(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)-\eta\mu 2x}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$

$=\dfrac{2x-\eta\mu 2x}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$.

vii) $f'(x)=\left(\dfrac{x\ln x}{x^2+1}\right)'$

$=\dfrac{(x\ln x)'(x^2+1)-x\ln x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{((x)'\ln x + x(\ln x)')(x^2+1) - 2x\cdot x\ln x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(\ln x+1)(x^2+1) - 2x^2\ln x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^2\ln x + \ln x + x^2 + 1 - 2x^2\ln x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{\ln x + x^2 + 1 - x^2\ln x}{(x^2+1)^2}.$$

viii) $f'(x) = \left(xe^x \varepsilon\phi x\right)'$

$$= (x)'e^x\varepsilon\phi x + x(e^x)'\varepsilon\phi x + xe^x(\varepsilon\phi x)'$$
$$= e^x\varepsilon\phi x + xe^x\varepsilon\phi x + \frac{xe^x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ix) $f'(x) = \left(\frac{1-x\ln x}{1+x\ln x}\right)'$

$$= \frac{(1-x\ln x)'(1+x\ln x) - (1-x\ln x)(1+x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{(-\ln x - 1)(1+x\ln x) - (1-x\ln x)(\ln x+1)}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{-(\ln x+1)(1+x\ln x) - (1-x\ln x)(\ln x+1)}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{(\ln x+1)(-1-x\ln x-1+x\ln x)}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{-2(\ln x+1)}{(1+x\ln x)^2}.$$

x) $f'(x) = \left(\frac{1-2^x}{1+2^x}\right)'$

$$= \frac{(1-2^x)'(1+2^x) - (1-2^x)(1+2^x)'}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2^x\ln 2(1+2^x) - (1-2^x)2^x\ln 2}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2^x\ln 2(1+2^x+1-2^x)}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2\cdot 2^x\ln 2}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2^{x+1}\ln 2}{(1+2^x)^2}.$$

2) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

ii) $f(x) = xe^{\sqrt{1-x}}$

iii) $f(x) = e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1)$

iv) $f(x) = \ln^2\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)$

v) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 - \ln x^2}$

vi) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x}$

vii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)$

viii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)^2$

ix) $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

x) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$

xi) $f(x) = e^{-2x} + e^{-x}$

Λύση:

i) $f'(x) = \left(e^{2x} - 2e^x\right)' = e^{2x}(2x)' - 2e^x$
$$= 2e^{2x} - 2e^x$$
$$= 2e^x(e^x - 1).$$

ii) $f'(x) = \left(xe^{\sqrt{1-x}}\right)'$
$$= (x)'e^{\sqrt{1-x}} + x\left(e^{\sqrt{1-x}}\right)'$$
$$= e^{\sqrt{1-x}} + xe^{\sqrt{1-x}}\left(\sqrt{1-x}\right)'$$
$$= e^{\sqrt{1-x}} + xe^{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(1-x)'$$
$$= e^{\sqrt{1-x}} - \frac{xe^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}.$$

iii) $f'(x) = \left(e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1)\right)'$
$$= (e^{\sqrt{3x}})'(\sqrt{3x}+1) + e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1)'$$
$$= e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x})'(\sqrt{3x}+1) + e^{\sqrt{3x}}\frac{1}{2\sqrt{3x}}(3x)'$$
$$= e^{\sqrt{3x}}\frac{1}{2\sqrt{3x}}(3x)'(\sqrt{3x}+1) + e^{\sqrt{3x}}\frac{3}{2\sqrt{3x}}$$
$$= \frac{3e^{\sqrt{3x}}}{2\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1) + \frac{3e^{\sqrt{3x}}}{2\sqrt{3x}}$$
$$= \frac{3(\sqrt{3x}+2)e^{\sqrt{3x}}}{2\sqrt{3x}}.$$

iv) $f'(x) = \left[\ln^2\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\right]'$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\left[\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\right]'$$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{x^2+x+1}{x+2}}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)'$$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}\cdot\frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x+1)}{(x+2)^2}$$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

v) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-1-\ln x^2}\right)'$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}(x^2-1-\ln x^2)'$

$=\dfrac{2x-\dfrac{1}{x^2}(x^2)'}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$

$=\dfrac{2x-\dfrac{2x}{x^2}}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$

$=\dfrac{2x-\dfrac{2}{x}}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$

$=\dfrac{2(x^2-1)}{2x\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$

$=\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$.

vi) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x-2}{\ln^2 x}\right)'$

$=\dfrac{(\ln x-2)'\ln^2 x-(\ln x-2)(\ln^2 x)'}{(\ln^2 x)^2}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{x}\ln^2 x-(\ln x-2)2\ln x(\ln x)'}{\ln^4 x}$

$=\dfrac{\dfrac{\ln^2 x}{x}-(\ln x-2)2\ln x\dfrac{1}{x}}{\ln^4 x}$

$=\dfrac{\dfrac{\ln^2 x}{x}-\dfrac{(\ln x-2)2\ln x}{x}}{\ln^4 x}$

$=\dfrac{\ln^2 x-(\ln x-2)2\ln x}{x\ln^4 x}$

$=\dfrac{\ln^2 x-2\ln^2 x+4\ln x}{x\ln^4 x}$

$=\dfrac{-\ln^2 x+4\ln x}{x\ln^4 x}$

$=\dfrac{\ln x(4-\ln x)}{x\ln^4 x}$

$=\dfrac{4-\ln x}{x\ln^3 x}$.

vii) $f'(x)=\left(\eta\mu^3(2x+3)\right)'$

$=3\eta\mu^2(2x+3)\left(\eta\mu(2x+3)\right)'$

$=3\eta\mu^2(2x+3)\sigma\upsilon\nu(2x+3)(2x+3)'$

$=6\eta\mu^2(2x+3)\sigma\upsilon\nu(2x+3)$

$=3\eta\mu(4x+6)\eta\mu(2x+3)$.

viii) $f'(x)=\left(\eta\mu^3(2x+3)^2\right)'$

$=3\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot\left(\eta\mu(2x+3)^2\right)'$

$=3\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot\sigma\upsilon\nu(2x+3)^2\left((2x+3)^2\right)'$

$=3\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot 2(2x+3)(2x+3)'\sigma\upsilon\nu(2x+3)^2$

$=12\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot(2x+3)\sigma\upsilon\nu(2x+3)^2$.

ix) $f'(x)=\left[\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2\right]'$

$=2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)'$

$=2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}$

$=4\dfrac{x-1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

x) $f'(x)=\left(\sqrt{\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}}\cdot\left(\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}\right)'$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\cdot\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x)-\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\cdot\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x+1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\cdot\dfrac{-2\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}$

$=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}$.

xi) $f'(x)=\left(e^{-2x}+e^{-x}\right)'=e^{-2x}(-2x)'+e^{-x}(-x)'$

$=-2e^{-2x}-e^{-x}$

$=-e^{-x}(2e^{-x}+1)$.

3) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $f(x)=x^{\ln x}$

iii) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

Λύση:

i) $f'(x)=\left((\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\left(e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu x)}\right)'$

$=e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu x)}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu x)\right)'$

$=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left((\sigma\upsilon\nu x)'\cdot\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(\ln(\eta\mu x)\right)'\right)$

$=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(-\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\dfrac{1}{\eta\mu x}(\eta\mu x)'\right)$

$=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(-\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)$

ii) $f'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\ln x}\right)'$

$$=e^{\ln x\cdot\ln x}\left(\ln x\cdot\ln x\right)'$$

$$=x^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}\ln x\right)$$

$$=\frac{2x^{\ln x}\ln x}{x}.$$

iii) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\right)'$

$$=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)'$$

$$=x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

4) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού και $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ οι ρίζες του, να δείξετε ότι: $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}+\frac{1}{x-\rho_4}$.

Λύση: Αφού ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 οι ρίζες του πολυωνύμου P(x), αυτό μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$P(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)$ οι ρίζες του.

$P'(x)=(x-\rho_1)'(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)+$
$+(x-\rho_1)(x-\rho_2)'(x-\rho_3)(x-\rho_4)+$
$+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)'(x-\rho_4)+$
$+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)'$
$=(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)+(x-\rho_1)(x-\rho_3)(x-\rho_4)+$
$+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_4)+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$

Άρα $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)}+$
$+\frac{(x-\rho_1)(x-\rho_3)(x-\rho_4)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)}+$
$+\frac{(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_4)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)}+$
$+\frac{(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)}=$
$=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}+\frac{1}{x-\rho_4}.$

5) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και ρ_1,ρ_2,ρ_3 οι ρίζες του, διαφορετικές ανά δυο, να δείξετε ότι: $\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=0.$

Λύση: Αφού ρ_1,ρ_2,ρ_3 οι ρίζες του πολυωνύμου P(x), αυτό μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$P(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ οι ρίζες του. Τότε:

$P'(x)=(x-\rho_1)'(x-\rho_2)(x-\rho_3)+$
$+(x-\rho_1)(x-\rho_2)'(x-\rho_3)+$
$+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)'=$
$=(x-\rho_2)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

οπότε $P'(\rho_1)=(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)$,
$P'(\rho_2)=(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)$
$=-(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)$ και
$P'(\rho_3)=(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)$
$=(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)$.

Άρα $\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}=\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}$
$\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}=-\frac{\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)}$
και $\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=\frac{\rho_3}{(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}$ +

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}-$$
$$-\frac{\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)}+\frac{\rho_3}{(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}=$$
$$=\frac{\rho_1(\rho_2-\rho_3)-\rho_2(\rho_1-\rho_3)+\rho_3(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}$$
$$=\frac{\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}=0$$

6) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$, τέτοιο ώστε $P(x)-P'(x)=x^4-4$, για κάθε $x\in R$.

Λύση: $P'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$

$P(x)-P'(x)=x^4-4 \Leftrightarrow$
$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta-4x^3-3\alpha x^2-2\beta x-\gamma=x^4-4 \Leftrightarrow$
$(\alpha-4)x^3+(\beta-3\alpha)x^2+(\gamma-2\beta)x+(\delta-\gamma)=-4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-4=0\\ \beta-3\alpha=0\\ \gamma-2\beta=0\\ \delta-\gamma=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=12\\ \gamma=24\\ \delta=20\end{cases}.$$

Άρα $P(x)=x^4+4x^3+12x^2+24x+20$.

7) Εάν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο R^*, με:
- **i)** $g(x)=xf(x)$, για κάθε $x\in R^*$,
- **ii)** $g(1)=14$ και
- **iii)** η g είναι παραγωγίσιμη στο R^*, με $g'(1)=17$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

Λύση: $g(x)=xf(x) \overset{x=1}{\Rightarrow} g(1)=f(1) \Rightarrow f(1)=14$.

Για $x\neq0$ έχουμε:

$f(x)=\frac{g(x)}{x}$ και

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{g(x)}{x}-14}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-14x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-14x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-14+14-14x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)-14}{x(x-1)}-\frac{14(x-1)}{x(x-1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{g(x)-14}{x-1}-\frac{14}{x}\right)$$
$=1\cdot g'(1)-14$
$=17-14$
$=3.$

<u>2ος τρόπος</u>: $f(x)=\frac{g(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο R* ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα για x≠0 έχουμε:

$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$ και για x=1:

$f'(1)=\frac{g'(1)-g(1)}{1^2}=17-14=3.$

<u>3ος τρόπος</u>: $f(x)=\frac{g(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο R* ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα για x≠0 παραγωγίζουμε την δοθείσα και έχουμε:

$g(x)=xf(x) \Leftrightarrow g'(x)=f(x)+xf'(x)$ και για x=1:

$g'(1)=f(1)+1\cdot f'(1) \Leftrightarrow 17=14+f'(1)$
$\Leftrightarrow f'(1)=3.$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+2x^2-x$. Να βρείτε το $\alpha\in R$, ώστε η εφαπτομένη (ε) της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$, να:

i) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1): $y=3x+1$

ii) είναι κάθετη στην ευθεία (ε_2): $y=-2x+1$

iii) σχηματίζει γωνία 135^0 με τον ημιάξονα Ox.

<u>Λύση</u>: $f'(x)=3\alpha x^2+4x-1$

i) $\varepsilon // \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_1}$
$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=3$
Επίσης $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=3$
$\Leftrightarrow f'(1)=3$
$\Leftrightarrow 3\alpha+4-1=3 \Leftrightarrow \alpha=0$

ii) $\varepsilon \perp \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1$
$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot(-2)=-1$
$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=1/2$
Επίσης $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=1/2$
$\Leftrightarrow f'(1)=1/2$
$\Leftrightarrow 3\alpha+4-1=1/2$
$\Leftrightarrow \alpha=-5/6.$

iii) $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(1)=\varepsilon\varphi 135^0$
$\Leftrightarrow 3\alpha+4-1=-1$
$\Leftrightarrow \alpha=-4/3.$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\pi/8$,

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

<u>Λύση</u>:

i) $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{8}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f'(x)=-2\eta\mu 2x$

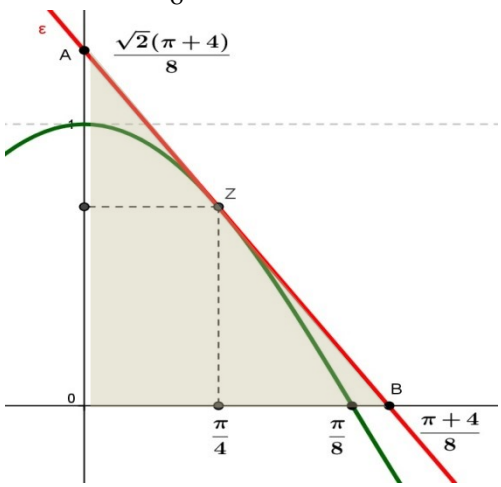
$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2\eta\mu 2\frac{\pi}{8}=-2\eta\mu\frac{\pi}{4}=-2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}.$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y-f\left(\frac{\pi}{8}\right)=f'\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow$$
$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow$$
$$y=-\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8} \quad \text{.....(1)}$$

ii) $(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} y=\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$

$(1)\overset{y=0}{\Rightarrow} x=\frac{\pi+4}{8}$



$(OAB)=\frac{1}{2}OA\cdot OB$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi+4}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\pi+4)^2}{128}.$$

10) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R.
i) Εάν f άρτια, τότε f΄ περιττή,
ii) Εάν f περιττή, τότε f΄ άρτια,
iii) Εάν f περιοδική με περίοδο Τ, τότε f΄ περιοδική με περίοδο επίσης Τ.
iv) Αν f περιττή και στο $x_0=1$ έχει κλίση 2008, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=-1$.

Λύση:
i) f άρτια $\Leftrightarrow$ f(-x)=f(x) για κάθε x
$\Rightarrow$ [f(-x)]΄=f΄(x)
$\Rightarrow$ f΄(-x)·(-x)΄=f΄(x).
$\Rightarrow$ -f΄(-x)=f΄(x).
$\Rightarrow$ f΄(-x)=-f΄(x).
Άρα f΄περιττή.
ii) f περιττή $\Leftrightarrow$ f(-x)=-f(x) για δάθε x
$\Rightarrow$ [f(-x)]΄=-f΄(x)
$\Rightarrow$ f΄(-x)·(-x)΄=-f΄(x).
$\Rightarrow$ -f΄(-x)=-f΄(x).
$\Rightarrow$ f΄(-x)=f΄(x).
Άρα f΄ άρτια.
iii) f περιοδική με περίοδο Τ
$\Leftrightarrow$ f(x+T)=f(x) για δάθε x
$\Rightarrow$ [f(x+T)]΄=f΄(x)
$\Rightarrow$ f΄(x+T)·(x+T)΄=f΄(x).
$\Rightarrow$ f΄(x+T)=f΄(x).
Άρα f΄ περιοδική με περίοδο Τ.
iv) Αφού f περιττή, η f΄ είναι άρτια.
Άρα f΄(-1)=f΄(1)=2008.

11) Εάν f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f(x_0)=2$, $[f^3(x_0)]'=3$, να δείξετε ότι $f'(x_0)=1/4$.

Λύση: $[f^3(x)]'=3f^2(x)f'(x)$ και για $x=x_0$:
$[f^3(x_0)]'=3f^2(x_0)f'(x_0)$
$\Leftrightarrow 3=3\cdot 4f'(x_0)$
$\Leftrightarrow f'(x_0)=1/4$.

12) Εάν f παραγωγίσιμη στο R και $f(2x+3)=x^5$ για κάθε $x\in R$, να βρείτε την f΄(x).

Λύση: $[f(2x+3)]'=(x^5)'$
$\Leftrightarrow f'(2x+3)\cdot(2x+3)'=5x^4$
$\Leftrightarrow 2f'(2x+3)=5x^4$ .....(1)
Θέτω 2x+3=u.
Τότε $x=\frac{u-3}{2}$ και η (1) γίνεται:
$2f'(u)=5\left(\frac{u-3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow f'(u)=\frac{5(u-3)^4}{32}$.

13) Εάν y=xημx, $x\in R$, να δείξετε ότι $(y'''+y')^2+(y''+y)^2=4$.

Λύση: y΄=ημx+xσυνx
y΄΄=συνx+συνx-xημx
=2συνx-xημx
y΄΄΄=-2ημx-ημx-xσυνx
=-3ημx-xσυνx. Άρα
$(y'''+y')^2+(y''+y)^2=(-3\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2+$
$+(2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+x\eta\mu x)^2$
$=(-2\eta\mu x)^2+(2\sigma\upsilon\nu x)^2$
$=4\eta\mu^2 x+4\sigma\upsilon\nu^2 x$
$=4(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)$
$=4\cdot 1$
$=4$.

14) Εάν $y=xe^{2x}$, $x\in R$, να δείξετε ότι:
$y''=4y'-4y$.

Λύση: $y'=e^{2x}+xe^{2x}(2x)'$
$=e^{2x}+2xe^{2x}$
$y''=e^{2x}(2x)'+2e^{2x}+2xe^{2x}(2x)'$
$=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}$
$=4e^{2x}+4xe^{2x}$.
$=4(e^{2x}+xe^{2x})$.
Άρα $4y'-4y=4(e^{2x}+2xe^{2x})-4xe^{2x}$
$=4(e^{2x}+2xe^{2x}-xe^{2x})$
$=4(e^{2x}+xe^{2x})$
$=y''$.

15) Εάν f δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(\ln x)=e^x+\ln x$, $x>0$, να βρείτε την f΄΄(0).

Λύση: $[f(\ln x)]'=(e^x+\ln x)'$
$\Leftrightarrow f'(\ln x)\cdot(\ln x)'=e^x+\frac{1}{x}$
$\Leftrightarrow \frac{f'(\ln x)}{x}=e^x+\frac{1}{x}$ .....(1)
$\left(\frac{f'(\ln x)}{x}\right)'=\left(e^x+\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow$
$\frac{[f'(\ln x)]'x-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$
$\frac{f''(\ln x)(\ln x)'x-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}$
$\frac{f''(\ln x)\frac{1}{x}x-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}$
$\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}$ .....(2)
Η σχέση (1) για x=1 δίνει
$\frac{f'(\ln 1)}{1}=e^1+\frac{1}{1}\Leftrightarrow f'(0)=e+1$.....(3)
Η σχέση (2) για x=1 δίνει
$\frac{f''(\ln 1)-f'(\ln 1)}{1^2}=e^1-\frac{1}{1^2}\Leftrightarrow$
$f''(0)-f'(0)=e-1\Leftrightarrow$.....λόγω της (3)
$f''(0)-e-1=e-1\Leftrightarrow$
$f''(0)=2e$.

16) Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x), για τα οποία ισχύει $P(x)=[P'(x)]^2$, για κάθε $x\in R$.

Λύση: Εάν το P(x) είναι ν-στού βαθμού, το $[P'(x)]^2$ είναι $2(\nu-1)=2\nu-2$ βαθμού.

Άρα $\nu=2\nu-2 \Leftrightarrow \nu=2$.

Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$.

Τότε $[P'(x)]^2=(2\alpha x+\beta)^2$

$=4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2$.

$P(x)=[P'(x)]^2 \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma=4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha^2=\alpha \\ 4\alpha\beta=\beta \\ \gamma=\beta^2 \end{cases} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{4} \\ \beta\in R \\ \gamma=\beta^2 \end{cases}$$

Άρα $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\beta x+\beta^2$.

17) **α)** Να δείξετε ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει ρίζα τον αριθμό $x=\rho$ με πολλαπλότητα κ ($\kappa\in N$, $\kappa>1$), τότε το $x=\rho$ είναι ρίζα της f΄ με πολλαπλότητα κ-1

β) Υπολογίστε τα $\alpha,\beta\in R$, ώστε η εξίσωση $3x^3-5x^2+(\alpha+1)x-\beta=0$ να έχει διπλή ρίζα το $x=1$.

Λύση:

α) Αφού η f έχει ρίζα τον αριθμό $x=\rho$ με πολλαπλότητα κ, τότε $f(x)=(x-\rho)^{\kappa}\cdot\pi(x)$, με $\pi(\rho)\neq 0$.

$f'(x)=\kappa(x-\rho)^{\kappa-1}\cdot\pi(x)+(x-\rho)^{\kappa}\cdot\pi'(x)$

$=(x-\rho)^{\kappa-1}\left(\kappa\pi(x)+(x-\rho)\cdot\pi'(x)\right)$.

Προφανώς $f'(\rho)=0$ και

$\kappa\pi(\rho)+(\rho-\rho)\cdot\pi'(\rho)=\kappa\pi(\rho)\neq 0$, γιατί $\pi(\rho)\neq 0$.

Άρα το ρ είναι ρίζα της f΄ με πολλαπλότητα κ-1.

β) Αφού η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=3x^3-5x^2+(\alpha+1)x-\beta$, έχει διπλή ρίζα το 1, από το πρώτο ερώτημα η παράγωγος $f'(x)=9x^2-10x+\alpha+1$ έχει απλή ρίζα το 1.

Άρα $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-5+a+1-\beta=0 \\ 9-10+\alpha+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=-1$.

18) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^3+2x+1$ δια $(x-1)^2$.

Λύση: Επειδή το $(x-1)^2$ είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο υ(x) θα είναι 1ου βαθμού. Έστω $\upsilon(x)=\alpha x+\beta$.

Τότε $P(x)=(x-1)^2\pi(x)+\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow x^3+2x+1=(x-1)^2\pi(x)+\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow x^3+2x+1-\alpha x-\beta=(x-1)^2\pi(x)$……(1)

Άρα το πολυώνυμο $Q(x)=x^3+2x+1-\alpha x-\beta$ έχει διπλή ρίζα το 1, οπότε από την προηγούμενη άσκηση η $Q'(x)=3x^2+2-\alpha$ έχει απλή ρίζα το 1.

$\begin{cases} Q(1)=0 \\ Q'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2+1-a-\beta=0 \\ 3+2-\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha=5$ και $\beta=-1$.

Άρα $\upsilon(x)=5x-1$.

19) Έστω $f,g:R\to R$, παραγωγίσιμες στο R με $f(x)g(x)e^x+\ln x=xe^{x-1}$, για κάθε $x>0$, να δείξετε ότι $\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=-\dfrac{f(1)}{g(1)}$.

Λύση: $f(x)g(x)e^x+\ln x=xe^{x-1}$

$\Leftrightarrow f(x)g(x)+\dfrac{\ln x}{e^x}=\dfrac{x}{e}$ και παραγωγίζοντας

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+\dfrac{\frac{1}{x}e^x-e^x\ln x}{e^{2x}}=\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow$

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}=\dfrac{1}{e}$

η οποία για $x=1$ δίνει:

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)+\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow$

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=0 \Leftrightarrow$

$f'(1)g(1)=-f(1)g'(1) \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=-\dfrac{f(1)}{g(1)}$.

20) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} 2x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2} & ,\alpha\nu\ x\in R^* \\ 0 & ,\alpha\nu\ x=0 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $f'(x)=\begin{cases} 4x\left(\eta\mu\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2}\right) & ,\alpha\nu\ x\in R^* \\ 0 & ,\alpha\nu\ x=0 \end{cases}$

ii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)=f'(0)$

iii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=2\pi^2\eta\mu\dfrac{1}{\pi^2}$.

Λύση:

i) • για $x\neq 0$ $f'(x)=\left(2x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)'=$

$=4x\eta\mu\dfrac{1}{x^2}+2x^2\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-\dfrac{2x}{x^4}\right)=$

$=4x\left(\eta\mu\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2}\right)$.

• $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)=0$.

(γιατί $\left|2x\eta\mu\frac{1}{x^2}\right|\le|2x|$

$\Leftrightarrow -|2x|\le 2x\eta\mu\frac{1}{x^2}\le|2x|$

και επειδή $\lim\limits_{x\to0}\left(-|2x|\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(|2x|\right)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=0$.

Άρα

$$f'(x)=\begin{cases}4x\left(\eta\mu\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2}\right) & ,\alpha\nu\ x\in R^*\\ 0 & ,\alpha\nu\ x=0\end{cases}.$$

ii) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, θα είναι και συνεχής στο 0.

Άρα $\lim\limits_{x\to0}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=$f(0)=0=f′(0).

iii)Ομοίως $\lim\limits_{x\to\pi}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=$

=f(π)= $2\pi^2\eta\mu\frac{1}{\pi^2}$.

21) Η συνάρτηση f:R→R, είναι παραγωγίσιμη με f(1)=3 και f(x³)=f(x), για κάθε x∈R. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2f(x)-3}{x-1}$.

Λύση: Παραγωγίζουμε την δοθείσα σχέση f(x³)=f(x) και βρίσκουμε

[f(x³)]′=f′(x) ⇔ f′(x³)·(x³)′=f′(x)

⇔ 3x²f′(x³)=f′(x)

$\overset{x=1}{\Rightarrow}$ 3f′(1)=f′(1)

⇔ f′(1)=0.

Θέτω g(x)=x²f(x), x∈R.

Τότε g(1)=f(1)=3 και

g′(x)=2xf(x)+x²f′(x) οπότε

g′(1)=2f(1)+f′(1)

=2·3+0

=6.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

=g′(1)=6.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a_1^x+a_2^{2x}+\ldots+a_\nu^{\nu x}$, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν f′(0)=0, να δείξετε ότι $a_1a_2^2\ldots a_\nu^\nu=1$.

Λύση:

$$f'(x)=a_1^x\ln a_1+2a_2^{2x}\ln a_2+\ldots+\nu a_\nu^{\nu x}\ln a_\nu$$

και για x=0:

$$f'(0)=a_1^0\ln a_1+2a_2^0\ln a_2+\ldots+\nu a_\nu^0\ln a_\nu\Leftrightarrow$$

$$0=\ln a_1+2\ln a_2+\ldots+\nu\ln a_\nu\Leftrightarrow$$

$$\ln a_1+\ln a_2^2+\ldots+\ln\alpha_\nu^\nu=0$$

$$\ln\left(a_1a_2^2\ldots\alpha_\nu^\nu\right)=\ln1\Leftrightarrow$$

$$a_1a_2^2\ldots a_\nu^\nu=1.$$

23) Έστω f παραγωγίσιμη στο R με f(x³)=f³(x), f(x)>0 και f′(x)≠0, για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(1)=1.

Λύση: Παραγωγίζουμε την σχέση f(x³)= =f³(x) και βρίσκουμε: [f(x³)]′=[f³(x)]′

⇔ f′(x³)·(x³)′=3f²(x)·f′(x)

⇔ 3x²·f′(x³)=3f²(x)·f′(x)

η οποία για x=1 δίνει

3f′(1)=3f²(1)·f′(1)

και επειδή f′(x)≠0, για κάθε x∈R, θα είναι f′(1)≠0 η τελευταία γίνεται

f²(1)=1

⇒ f(1)=±1

και αφού f(x)>0 για κάθε x∈R, ⇒ f(1)>0, οπότε η τελευταία σχέση δίνει f(1)=1.

24) Έστω $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Να δείξετε ότι:

i) f²(x)+f′(x)=1

ii) f′′(x)=-2f(x)f′(x)

Λύση:

i) $$f'(x)=\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)'$$

$$=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}.$$

$$f^2(x)+f'(x)=\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2+\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^{2x}-1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)^2}+\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=1.$$

ii) f²(x)+f′(x)=1 ⇔ [f²(x)+f′(x)]′=(1)′

⇔ 2f(x)f′(x)+f′′(x)=0

⇔ f′′(x)=-2f(x)f′(x).

25) Εάν για την συνάρτηση f ισχύει f(0)=0, f΄(x)=3+f³(x) και f΄(x)≠0, για κάθε x∈R, να δείξετε ότι:

i) $\frac{f''(x)}{f'(x)} = 3f^2(x),\ x \in R$

ii) f΄΄(0)=0

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$

Λύση:

i) f΄΄(x)=3f²(x)f΄(x) $\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f'(x)} = 3f^2(x),\ x \in R$.

ii) f΄΄(x)=3f²(x)f΄(x) $\overset{x=0}{\Rightarrow}$ f΄΄(0)=3f²(0)f΄(0) (0)

$\Leftrightarrow$ f΄΄(0)=0.

iii) f΄(x)=3+f³(x) $\overset{x=0}{\Rightarrow}$ f΄(0)=3+f³(0) (0)

$\Leftrightarrow$ f΄(0)=3

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 3$ (0)

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$.

26) Έστω f παραγωγίσιμη στο R, 1-1 και τέτοια ώστε f΄(x)=f(x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x}$.

(*Υπόδειξη*: f(f⁻¹(x))=x)

Λύση: f(f⁻¹(x))=x $\Rightarrow$ [f(f⁻¹(x))]΄=(x)΄

$\Rightarrow$ f΄(f⁻¹(x))·(f⁻¹(x))΄=1

$\overset{f'=f}{\Rightarrow}$ f(f⁻¹(x))·(f⁻¹(x))΄=1

$\Rightarrow$x·(f⁻¹(x))΄=1

$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x}$.

27) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ημ2x+2συν²x, x∈(0,2π). Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη (δ) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): 2x-y+5=0.

Λύση: f(x)=ημ2x+2συν²x

$\Rightarrow$ f΄(x)=2συν2x+4συνx(συνx)΄

$\Rightarrow$ f΄(x)=2συν2x-4συνxημx.

$\Rightarrow$ f΄(x)=2συν2x-2ημ2x.

(δ)//(ε) $\Leftrightarrow \lambda_\delta = \lambda_\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ f΄(x₀)=2

$\Leftrightarrow$ 2συν2x₀-2ημ2x₀=2

$\Leftrightarrow$ συν2x₀-ημ2x₀=1……(1)

$\Leftrightarrow$ (συν2x₀-2ημ2x₀)²=1

$\Leftrightarrow$ **συν²2x₀**-2συν2x₀ημ2x₀+**ημ²2x₀**=1 (1)

$\Leftrightarrow$ ημ4x₀=1

$\Leftrightarrow$ 4x₀=κπ, κ∈Z……(2)

x₀∈(0,2π) $\Leftrightarrow$ 0<4x₀<8π

$\Leftrightarrow$ 0<κπ<8π

$\Leftrightarrow$ 0<κ<8

- κ=1. Τότε (2) $\Rightarrow$ 4x₀=π
  $\Rightarrow$ x₀=π/4.

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:
συν2x₀-ημ2x₀ =συν(π/2)-ημ(π/2)
=0-1
=-1.

- κ=2. Τότε (2) $\Rightarrow$ 4x₀=2π
  $\Rightarrow$ x₀=π/2.

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:
συν2x₀-ημ2x₀ =συνπ-ημπ
=-1-0
=-1.

- κ=3. Τότε (2) $\Rightarrow$ 4x₀=3π
  $\Rightarrow$ x₀=3π/4.

Δεκτή λόγω της (1) γιατί:
συν2x₀-ημ2x₀ =συν(3π/2)-ημ(3π/2)
=0-(-1)
=1.
f(3π/4)=ημ(3π/2)+2συν²(3π/2)
=-1+0
=-1.
Άρα Α(3π/4,-1).

- κ=4. Τότε (2) $\Rightarrow$ 4x₀=4π
  $\Rightarrow$ x₀=π.

Δεκτή λόγω της (1) γιατί:
συν2x₀-ημ2x₀ =συν2π-ημ2π
=1-0
=1.
f(π)=ημ2π+2συν²2π
=0+2
=2.
Άρα Α(π,2).

- κ=5. Τότε (2) $\Rightarrow$ 4x₀=5π
  $\Rightarrow$ x₀=5π/4.

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:
συν2x₀-ημ2x₀ =συν(5π/2)-ημ(5π/2)
=0-1
=-1.

- κ=6. Τότε (2) $\Rightarrow$ 4x₀=6π
  $\Rightarrow$ x₀=3π/2.

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:
συν2x₀-ημ2x₀ =συν(3π)-ημ(3π)
=-1-0
=-1.

- κ=7. Τότε (2) $\Rightarrow$ 4x₀=7π
  $\Rightarrow$ x₀=7π/4.

Δεκτή λόγω της (1) γιατί:
συν2x₀-ημ2x₀ =συν(7π/2)-ημ(7π/2)
=0-(-1)
=1
f(7π/4)=ημ(7π/2)+2συν²(7π/2)
=-1+0

=-1.

Άρα Α(7π/4,-1).

28) Υπολογίστε τα α,β∈R, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{x^2+x+1}{2x}$ και g(x)=x²+αx+β, να έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, κάθετη στην ευθεία (δ): 2x-3y+5=0.

Λύση: $\lambda_\delta=-\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$.

Άρα αν (ε) η κοινή εφαπτομένη, τότε $\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{2}$.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)2x-2(x^2+x+1)}{4x^2}=\frac{2x^2-2}{4x^2}.$$

g΄(x)=2x+α.

$f'(x_0)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow =\frac{2x_0^2-2}{4x_0^2}=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{1}{2}$.

- Αν $x_0=\frac{1}{2}$ τότε $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow$ 1+α=$-\frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow$ α=$-\frac{5}{2}$.

και $f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$ β=$\frac{11}{4}$.

- Αν $x_0=-\frac{1}{2}$ τότε $g'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow$ -1+α=$-\frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow$ α=$-\frac{1}{2}$.

και $f\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$ β=$-\frac{5}{4}$.

29) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄Ox.

Λύση: Αρκεί να βρούμε τα σημεία που οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης f΄(x)=0.

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'$$

$$=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'$$

$$=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}\cdot(1-\ln x)$$

$$=x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x).$$

f΄(x)=0 $\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x)=0$

$\Leftrightarrow$ 1-lnx=0

$\Leftrightarrow$ lnx=1

$\Leftrightarrow$ x=e.

$f(e)=e^{\frac{1}{e}}$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι $A\left(e,e^{\frac{1}{e}}\right)$.

30) Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$, x>1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (δ): x-y+5=0.

Λύση: $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$

$\Leftrightarrow f(x)\ln x=x-f(x)$

$\Leftrightarrow f(x)(1+\ln x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+\ln x}\right)'=\frac{1+\ln x-x\frac{1}{x}}{1+\ln x}$$

$$=\frac{1+\ln x-1}{1+\ln x}=\frac{\ln x}{1+\ln x}$$

Εάν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (δ): x-y+5=0, πρέπει και αρκεί f΄(x)=1, το οποίο δεν μπορεί να γίνει γιατί $f'(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}<1$.

31) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

Λύση: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}$

$$=\frac{d\left(e^x\right)}{dx}\Big|_{x=0}$$

$$= e^x\Big|_{x=0}$$

$=e^0=1.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - 0}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$$

$$= \frac{d(\ln x)}{dx}\Big|_{x=1}$$

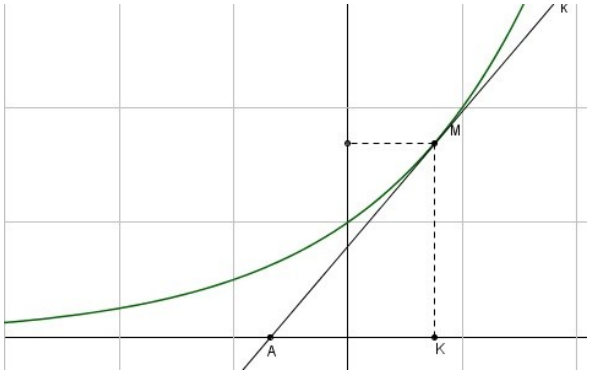
$$= \frac{1}{x}\Big|_{x=1}$$

$=1.$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x$. Αν η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ τέμνει τον άξονα xOx΄ στο Α, να δείξετε ότι η προβολή του ΜΑ στον άξονα xOx΄ έχει σταθερό μήκος.

Λύση: Φέρνουμε ΜΚ ⊥ x΄Ox (σχ.ημα).

Η προβολή του ΜΑ στον άξονα xx΄ είναι το ΑΚ.



$f'(x)=2^x\ln 2.$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-2^{x_0}=2^{x_0}\ln 2(x-x_0)$

η οποία για y=0 δίνει $x = \dfrac{x_0\ln 2 - 1}{\ln 2}$.

Άρα $K(x_0,0)$ και $A\left(\dfrac{x_0\ln 2-1}{\ln 2},0\right)$

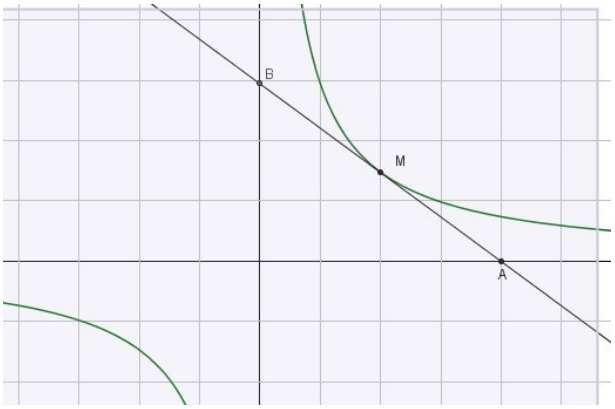
Επομένως $(AK) = \left|\dfrac{x_0\ln 2-1}{\ln 2} - x_0\right|$

$$= \left|-\frac{1}{\ln 2}\right| = \frac{1}{\ln 2} = \text{σταθ.}$$

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a}{x}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε τυχαίο σημείο της Μ, τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β, να δείξετε ότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Λύση: Εάν $M(x_0,f(x_0))$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Μ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$\Leftrightarrow y-\frac{a}{x_0} = -\frac{a}{x_0^2}(x-x_0).\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



$(1) \overset{y=0}{\Rightarrow} x = 2x_0$, άρα $A(2x_0,0)$

$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow} y = \dfrac{2a}{x_0}$, άρα $B\left(0,\dfrac{2a}{x_0}\right)$

Είναι $\dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{2x_0+0}{2} = x_0 = x_M$

και $\dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{0+\frac{2a}{x_0}}{2} = \dfrac{a}{x_0} = y_M$,

επομένως το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

34) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $c(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$s(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $t(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{s(x)}{c(x)}$ και

$\sigma(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{c(x)}{s(x)}$, $x\in R$. Να δείξετε ότι:

i) $s(0)=0$, $c(0)=1$, $t(0)=0$.

ii) $s(-x)=-s(x)$ και $c(-x)=c(x)$

iii) $t(-x)=-t(x)$ και $\sigma(-x)=-\sigma(x)$

iv) $c^2(x)-s^2(x)=1$

v) $c(x)+s(x)=e^x$, $c(x)-s(x)=e^{-x}$

vi) $c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)$

vii) $c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)$

viii) $s(x+y)=s(x)c(y)+c(x)s(y)$

ix) $s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)$

x) $t(x+y)=\dfrac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}$

xi) $t(x-y)=\dfrac{t(x)-t(y)}{1-t(x)t(y)}$

xii) $c(x)+c(y)=2c\left(\dfrac{x+y}{2}\right)c\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

xiii) $c(x)-c(y)=2s\left(\dfrac{x+y}{2}\right)s\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

xiv) $c(2x)=c^2(x)+s^2(x)$

xv) s(2x)=2s(x)c(x)

xvi) $t(2x)=\frac{2t(x)}{1+t^2(x)}$

xvii) $c(2x)=\frac{1+t^2(x)}{1-t^2(x)}$

xviii) $c(x)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

xix) $s(x)=\frac{t(x)}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

Για την παράγωγο των παραπάνω συναρτήσεων ισχύουν τα:

i) c΄(x)=s(x) και s΄(x)=c(x)

ii) t΄(x)=$1/c^2(x)$=1-$t^2(x)$

iii) σ΄(x)=-$1/s^2(x)$=1-$\sigma^2(x)$

Λύση:

i) $s(0)=\frac{e^0-e^{-0}}{2}$=0.

$c(0)=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

$t(0)=\frac{s(0)}{c(0)}=\frac{0}{1}=0$

ii) $s(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-s(x)$

$c(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=c(x)$

iii) $t(-x)=\frac{s(-x)}{c(-x)}=\frac{-s(x)}{c(x)}=-t(x)$

$\sigma(-x)=\frac{c(-x)}{s(-x)}=\frac{c(x)}{-s(x)}=-\sigma(x)$

iv) $c^2(x)-s^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}$

$=\frac{4}{4}=1.$

v) $c(x)+s(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$=\frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{2}$

$=\frac{2e^x}{2}$=e^x.

$c(x)-s(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$=\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}$

$=\frac{2e^{-x}}{2}$=e^{-x}.

vi) c(x)c(y)+s(x)s(y)=

$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{y-x}+e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{y-x}+e^{-x-y}}{4}$

$=\frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}$

$=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}$

= c(x+y).

vii) c(x)c(y)-s(x)s(y)=

$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{y-x}+e^{-x-y}}{4}-\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{y-x}+e^{-x-y}}{4}$

$=\frac{2e^{x-y}+2e^{y-x}}{4}$

$=\frac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}$

= c(x-y).

viii) s(x)c(y)+c(x)s(y)=

$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}$

$=\frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}$

$=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$

= s(x+y).

ix) s(x)c(y)-c(x)s(y)=

$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}-\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}$

$=\frac{2e^{x-y}-2e^{y-x}}{4}$

$=\frac{e^{x-y}-e^{y-x}}{2}$

= s(x-y).

x) $\frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}=\frac{\frac{s(x)}{c(x)}+\frac{s(y)}{c(y)}}{1+\frac{s(x)}{c(x)}\frac{s(y)}{c(y)}}$

$$= \frac{s(x)c(y)+s(y)c(x)}{\cancel{c(x)c(y)}} \Big/ \frac{c(x)cy)+s(x)s(y)}{\cancel{c(x)c(y)}}$$

$$= \frac{s(x+y)}{c(x+y)}$$

=t(x+y).

xi) $\dfrac{t(x)-t(y)}{1-t(x)t(y)} = \dfrac{\frac{s(x)}{c(x)}-\frac{s(y)}{c(y)}}{1-\frac{s(x)}{c(x)}\frac{s(y)}{c(y)}}$

$$= \frac{s(x)c(y)-s(y)c(x)}{\cancel{c(x)c(y)}} \Big/ \frac{c(x)cy)-s(x)s(y)}{\cancel{c(x)c(y)}}$$

$$= \frac{s(x-y)}{c(x-y)}$$

=t(x-y).

xii) c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)
c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y) } +

c(x+y)+c(x-y)=2c(x)c(y)……(1)
Θέτω x+y=A και x-y=B.
Τότε c(x)c(y)-s(x)s(y)
x+y=A
x-y=B } +

2x=A+B $\Leftrightarrow$ x= $\dfrac{A+B}{2}$ και

x+y=A
x-y=B } -

2y=A-B $\Leftrightarrow$ y= $\dfrac{A-B}{2}$ οπότε η (1) γίνεται $c(A)+c(B)=2c\left(\dfrac{A+B}{2}\right)c\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$.

xiii) c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)
c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y) } -

c(x+y)-c(x-y)=2s(x)s(y)……(1)
Θέτω x+y=A και x-y=B.
Τότε c(x)c(y)-s(x)s(y)
x+y=A
x-y=B } +

2x=A+B $\Leftrightarrow$ x= $\dfrac{A+B}{2}$ και

x+y=A
x-y=B } -

2y=A-B $\Leftrightarrow$ y= $\dfrac{A-B}{2}$ οπότε η (1) γίνεται $c(A)-c(B)=2s\left(\dfrac{A+B}{2}\right)s\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$.

xiv) $c^2(x)+s^2(x)=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2x}+\cancel{2}+e^{-2x}+e^{2x}\cancel{-2}+e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = c(2x).$$

xv) $2s(x)c(x)=\cancel{2}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$= \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = s(2x).$$

xvi) $t(2x)=t(x+x)$

$$= \frac{t(x)+t(x)}{1+t(x)t(x)}$$

$$= \frac{2t(x)}{1+t^2(x)}.$$

xvii) $\dfrac{1+t^2(x)}{1-t^2(x)} = \dfrac{1+\frac{s^2(x)}{c^2(x)}}{1-\frac{s^2(x)}{c^2(x)}}$

$$= \frac{c^2(x)+s^2(x)}{\cancel{c^2(x)}} \Big/ \frac{c^2(x)-s^2(x)}{\cancel{c^2(x)}}$$

$$= \frac{c(2x)}{1} = c(2x).$$

xviii) $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2(x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{s^2(x)}{c^2(x)}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2(x)-s^2(x)}{c^2(x)}}}$$

$$= \frac{c(x)}{\sqrt{c^2(x)-s^2(x)}}$$

$$= \frac{c(x)}{\sqrt{1}} = c(x).$$

xix) $\dfrac{t(x)}{\sqrt{1-t^2(x)}} = \dfrac{\frac{s(x)}{c(x)}}{\sqrt{1-\frac{s^2(x)}{c^2(x)}}}$

$$= \frac{\frac{s(x)}{c(x)}}{\sqrt{\frac{c^2(x)-s^2(x)}{c^2(x)}}}$$

$$= \frac{\frac{s(x)}{\cancel{c(x)}}}{\frac{1}{\cancel{c(x)}}} = s(x).$$

Για τις παραγώγους:

i) $c'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}(-x)'}{2}$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= s(x).$$

$$s'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}(-x)'}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= c(x).$$

ii) $t'(x) = \left(\frac{s(x)}{c(x)}\right)' = \frac{s'(x)c(x) - s(x)c'(x)}{c^2(x)}$

$$= \frac{c(x)c(x) - s(x)s(x)}{c^2(x)}$$

$$= \frac{c^2(x) - s^2(x)}{c^2(x)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{c^2(x)} \\ \frac{c^2(x)}{c^2(x)} - \frac{s^2(x)}{c^2(x)} = 1 - t^2(x) \end{cases}.$$

iii) $\sigma'(x) = \left(\frac{c(x)}{s(x)}\right)' = \frac{c'(x)s(x) - c(x)s'(x)}{s^2(x)}$

$$= \frac{s(x)s(x) - c(x)c(x)}{s^2(x)}$$

$$= \frac{s^2(x) - c^2(x)}{c^2(x)}$$

$$= -\frac{c^2(x) - s^2(x)}{s^2(x)}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{s^2(x)} \\ \frac{s^2(x)}{s^2(x)} - \frac{c^2(x)}{s^2(x)} = 1 - \sigma^2(x) \end{cases}.$$

35) 31743 ΘΕΜΑ 2: Δίνεται η συνάρτηση f: IR→IR με τύπο $f(x) = x\eta\mu x + 4$ για κάθε $x \in$ IR.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in$ IR ισχύουν $\varphi(0) < 0$ και $\varphi(\frac{\pi}{2}) > 0$. Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. Μονάδες 9

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x) = (x\eta\mu x + 4)' = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$

οπότε: $f'(0) = 0$ και $f'(\frac{\pi}{2}) = \eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 1$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) για τη συνάρτηση φ, με $\phi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$\phi(0) = f'(0) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} < 0$ και

$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α) η συνάρτηση φ, με $\phi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ ως άθροισμα συνεχών.

Λόγω του ερωτήματος (β) είναι:

$$\left.\begin{matrix} \phi(0) < 0 \\ \phi(\frac{\pi}{2}) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \phi(0) \cdot \phi(\tfrac{\pi}{2}) < 0,$$

οπότε από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$: $\varphi(x_0) = 0$. Επομένως η εξίσωση $\phi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

36) 33994 ΘΕΜΑ 3: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR→IR τέτοια, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$. Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0, g(0))$.

Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. Μονάδες 5

Λύση:

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Για x κοντά στο 0 θέτουμε $\frac{f(x)}{\eta\mu x} = h(x)$, με $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Είναι $\frac{f(x)}{\eta\mu x} = h(x) \Rightarrow f(x) = \eta\mu x \cdot h(x)$.

Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x \cdot h(x)\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x) \cdot \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 \cdot 0 = 0.$

β τρόπος

Είναι $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu x\right) =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right) \cdot \lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x) = 0 \cdot 0 = 0.$

β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση h του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x \cdot h(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot h(x)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} h(x) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

β τρόπος

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$, άρα $f'(0) = 0$.

γ) $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(0, g(0))$ είναι η $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$.

Έχουμε $g(0) = f(0) \cdot \eta\mu 0 = 0$ και επειδή οι συναρτήσεις f, φ (με $\varphi(x) = \eta\mu x$) είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ προκύπτει ότι και η $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Έτσι έχουμε

$g'(0) = f'(0) \cdot \eta\mu 0 + f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 0.$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης γίνεται $y - 0 = 0x \Leftrightarrow y = 0$.

β τρόπος (για τον υπολογισμό της παραγώγου της g στο $x_0 = 0$) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot f(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} \cdot$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \cdot 0 = 0$, άρα $g'(0) = 0$.

ii. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή. Τότε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $x_0 = 0$ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους $(0,0)$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot \eta\mu x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x_0 = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η ισότητα ισχύει και για $x = \pi$ και έτσι έπεται το ζητούμενο.

37) 34437 ΘΕΜΑ 2: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 2x$, $x > 0$ και $g(x) = e^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. Μονάδες 9

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1. Μονάδες 8

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g. Μονάδες 8

Λύση:

α) Έχουμε $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$.

Για την $f \circ g$ είναι:

$A_1 = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : e^{x+2} \in (0, +\infty)\} = \mathrm{IR} \neq \varnothing,$

οπότε ορίζεται η σύνθεση με τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$= ln\, g\,(x) + 2g(x)$$
$$= ln\, e^{x+2} + 2e^{x+2},$$
$$= x + 2 + 2e^{x+2}.$$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο IR με $g'(x) = (e^{x+2})' = e^{x+2} > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR οπότε και '1-1'.

γ) Για την εύρεση του τύπου της αντιστρόφου συνάρτησης της g, για $x \in \mathrm{IR}$, θέτουμε

$$g(x) = y \Leftrightarrow e^{x+2} = y, y > 0$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = ln\, y\,, y > 0$$
$$\Leftrightarrow x = ln\, y - 2, y > 0,$$

Άρα $g^{-1}(y) = ln\, y - 2, y > 0$ ή

$$g^{-1}(x) = ln\, x - 2, x > 0.$$

38) END.