

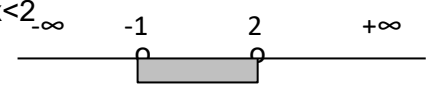
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Να γράψετε με μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

- i) $\{x \in \mathbb{R} / |2x-1| < 3\}$.
- ii) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+3}{2x} < 1\}$.
- iii) $\{x \in \mathbb{R} / -x^2+6x-8 \geq 0\}$.
- iv) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+2}{x-3} < 2\}$.
- v) $\{x \in \mathbb{R} / (x^2-4x+4)(x-1) \geq 0\}$.
- vi) $\{x \in \mathbb{R} / x^3-3x+2 \geq 0\}$.
- vii) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 4\}$.
- viii) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x^2} \geq 3\}$.
- ix) $\{x \in \mathbb{R} / |x-2| \geq 3\}$.
- x) $\{x \in \mathbb{R} / (x^2+x+1)(x-2) \leq 0\}$.

Λύση: i) $|2x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow -3+1 < 2x < 3+1 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$

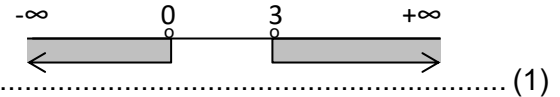
Άρα $\{x \in \mathbb{R} / |2x-1| < 3\} = (-1, 2)$.



ii) $\frac{x+3}{2x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-2x}{2x} < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x-3}{2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} > 0 \Leftrightarrow x(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 3$.

x	-∞	0	3	+∞
x(x-3)		+	-	+

Άρα $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+3}{2x} < 1\} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.



iii) $-x^2+6x-8 \geq 0$

$\Delta=4, x_1=4, x_2=2$.

x	-∞	2	4	+∞
-x ² +6x-8		-	+	-

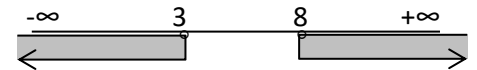


(1) $\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

Άρα $\{x \in \mathbb{R} / -x^2+6x-8 \geq 0\} = [2, 4]$.

iv) $\frac{x+2}{x-3} < 2 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-2(x-3)}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} < 0 \Leftrightarrow (x-8)(x-3) > 0$ (1)

x	-∞	3	8	+∞
(x-8)(x-3)		+	-	+

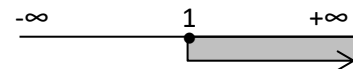


(1) $\Leftrightarrow x < 3 \text{ ή } x > 8$.

Άρα $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+2}{x-3} < 2\} = (-\infty, 3) \cup (8, +\infty)$.

v) $(x^2-4x+4)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Άρα $\{x \in \mathbb{R} / (x^2-4x+4)(x-1) \geq 0\} = [1, +\infty)$.



vi) $x^3-3x+2 \geq 0$

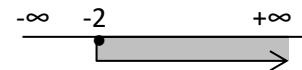
Οι ρίζες της (1) θα βρεθούν με Horner. Πιθανές ακέραιες ρίζες οι διαιρέτες του 2: $\pm 1, \pm 2$.

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	



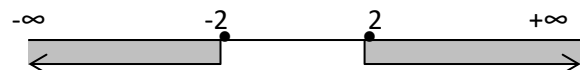
(1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -2$

$\Delta=9, x_1=1, x_2=-2$



Άρα $\{x \in \mathbb{R} / x^3-3x+2 \geq 0\} = [-2, +\infty)$.

vii) $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2$



Άρα $\{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 4\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

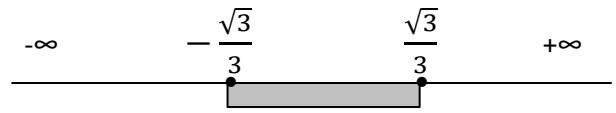
Παρατήρηση: Ο τρόπος λύσης μιας ανίσωσης (όπως εδώ της $x^2 \geq 4$) είναι ενδεικτικός και όχι μοναδικός ή υποχρεωτικός. Ο μαθητής θα μπορούσε να λύσει την ανίσωση με άλλον τρόπο.

viii) $\frac{1}{x^2} \geq 3 \Leftrightarrow$

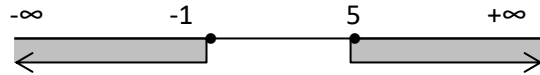
$$x^2 \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x^2} \geq 3\} = [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

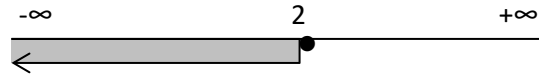


ix) $|x-2| \geq 3 \Leftrightarrow$
 $x-2 \leq -3$ ή $x-2 \geq 3 \Leftrightarrow$
 $x \leq -1$ ή $x \geq 5$.



Άρα $\{x \in \mathbb{R} / |x-2| \geq 3\} = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

x) $(x^2+x+1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow$
 $x-2 \leq 0$ γιατί το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $\Delta = -3 < 0$ και είναι ομόσημο του $a=1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $x^2+x+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Άρα $x \leq 2$.

Επομένως $\{x \in \mathbb{R} / (x^2+x+1)(x-2) \leq 0\} = (-\infty, 2]$

2) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

- i)** $f(x) = \frac{x-1}{-x^2+3x-2}$
- viii)** $f(x) = \frac{2}{\eta\mu x-1}$
- xv)** $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$
- ii)** $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$
- ix)** $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
- xvi)** $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$
- iii)** $f(x) = \sqrt[3]{3-|x-1|}$
- x)** $f(x) = \sqrt{5-\sqrt{x-6}}$
- xvii)** $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$
- iv)** $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$
- xi)** $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4x+4}}$
- xviii)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$
- v)** $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$
- xii)** $f(x) = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\sqrt{x}}$
- xix)** $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$
- vi)** $f(x) = \ln(x^2-7x+10)$
- xiii)** $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$
- xx)** $f(x) = \sqrt{e^{x+1}-e^2}$
- vii)** $f(x) = 2\sqrt{x^2-4x}$
- xiv)** $f(x) = x - \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$
- xxi)** $f(x) = \sqrt{e^{2x}-3e^x+2}$
- xxii)** $f(x) = \ln(e^x+1)$

Λύση: i) $-x^2+3x-2 \neq 0$
 $\Delta = 1, x_1 \neq 1$ και $x_2 \neq 2$.
 Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.



ii) $x^3-4x \geq 0$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $x^3-4x=0 \Leftrightarrow$
 $x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow$
 $x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ ή $x=-2$.



Για να λύσουμε την (1) κατασκευάζουμε τον πίνακα πρόσημου του x^3-4x

x	-∞	-2	0	2	+∞
x^3-4x	-	+	-	+	-

(1) $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$ ή $x \geq 2$.
 Άρα $D_f = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$.

iii) $3-|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \leq 3$
 $\Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3$
 $\Leftrightarrow -3+1 \leq x \leq 3+1$
 $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$. Άρα $D_f = [-2, 4]$.



iv) Πρέπει $\begin{cases} x-2 \neq 0 & (1) \\ \text{και} \\ \frac{x+2}{x-2} \geq 0 & (2) \end{cases}$.

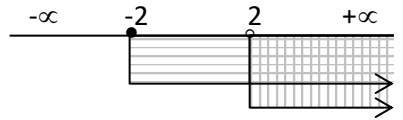
(1) $\Leftrightarrow x \neq 2$ (3)

(2) $\Leftrightarrow (x+2)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$ (4)

x	-∞	-2	2	+∞
$(x-2)(x+2)$	+	-	+	-

Από (3) και (4) έχουμε $D_f = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$.

v) Πρέπει $\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.



Άρα $D_f = (2, +\infty)$.

vi) $x^2 - 7x + 10 > 0$ (1)

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών του $x^2 - 7x + 10$:

$\Delta = 9, x_1 = 5, x_2 = 2$.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$		+	-	+

(1) $\Leftrightarrow x < 2$ ή $x > 5$.

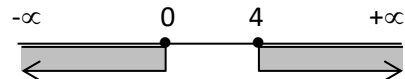
Άρα $D_f = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$.

vii) $x^2 - 4x \geq 0$ (1)

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών του $x^2 - 4x$:

$\Delta = 16, x_1 = 0, x_2 = 4$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	-	+



(1) $\Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 4$.

Άρα $D_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

viii) $\eta\mu x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$.

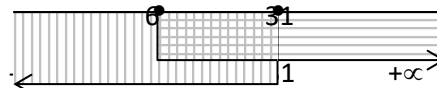
Άρα $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ ή $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$.

ix) $x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, γιατί $\Delta = -3 < 0$ και το τριώνυμο είναι ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $D_f = \mathbb{R}$.

x) Πρέπει $\begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ 5 - \sqrt{x - 6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ \sqrt{x - 6} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ \sqrt{(x - 6)^2} \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ |x - 6| \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} |x - 6| = x - 6 \text{ για } x \geq 6 \\ x - 6 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 31 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \leq x \leq 31$.



Άρα $D_f = [6, 31]$.

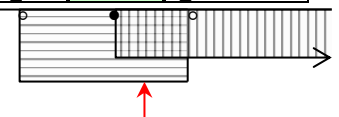
xi) Πρέπει $\begin{cases} x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x^2 + 4x + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.
γιατί $(x + 2)^2 \geq 0$

Άρα $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ ή $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

xii) Πρέπει $\begin{cases} \frac{2-x}{2+x} > 0 \\ \frac{2-x}{2+x} \neq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ ή } \frac{2-x}{2+x} < 0 \\ (2) \text{ ή } \frac{2-x}{2+x} = 0 \\ (3) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{2+x} > 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \\ \frac{2-x}{2+x} \neq -1 \Leftrightarrow x - 2 \neq x + 2 \Leftrightarrow -2 \neq 2 \text{ αληθής για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x \geq 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
2-x	+	+	-	-
2+x	-	+	+	+
(2-x)(2+x)	-	-	+	-



Άρα $x \in [0, 2)$ (4)

(2) $\Leftrightarrow (x > 2 \text{ ή } x < -2)$ και $(\sqrt{x} = \alpha \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \alpha^2 > 0, \alpha \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \alpha^2, \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha > 1$ (5)

(3) $\Leftrightarrow x = 2$ (6)

Από (4), (5) και (6) βρίσκουμε $D_f = [0, 2] \cup \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha^2, \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha > 1\}$.

xiii) Πρέπει $\begin{cases} 1 + x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1 + x^2} - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \sqrt{1 + x^2} > x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, γιατί $\sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

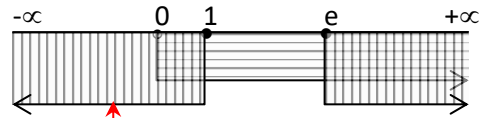
Άρα $D_f = \mathbb{R}$.

xiv) Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x - \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$

y	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	-	+	+	+
y-1	-	-	+	+
y(y-1)	+	-	+	+

(2) $\Leftrightarrow y^2 - y \geq 0 \Leftrightarrow y(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 0 \text{ ή } y \geq 1$.

Θέτω $y = \ln x$ (3)



(3) $\Leftrightarrow \ln x \leq 0 \text{ ή } \ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 1 \text{ ή } \ln x \geq \ln e \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq e$. (4)

Από (1) και (4) $\Leftrightarrow D_f = (0, 1] \cup [e, +\infty)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
1-x	+	+	-	
1+x	-	+	+	
(1-x)(1+x)	-	+	-	

xv) Επειδή $1 + e^x > 0$ άρα $1 + e^x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα είναι $D_f = \mathbb{R}$.

xvi) Πρέπει $\left\{ \begin{matrix} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Άρα $D_f = (-1, 1)$.

xvii) Πρέπει $\left\{ \begin{matrix} \ln x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \ln x \geq 1 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \ln x \geq \ln e \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x \geq e \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x \geq e$. Άρα $A = [e, +\infty)$.

xviii) Πρέπει $\left\{ \begin{matrix} 2 - \ln x > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \ln x < 2 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \ln x < \ln e^2 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x < e^2 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow 0 < x < e^2$. Άρα $A = (0, e^2)$.

xix) Πρέπει $\left\{ \begin{matrix} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x \geq 1 \\ x \neq \pm 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x > 1$. Άρα $A = (1, +\infty)$.

xx) Πρέπει $e^{x+1} - e^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \geq e^2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow A = [1, +\infty)$.

xxi) Πρέπει $e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$ (1)

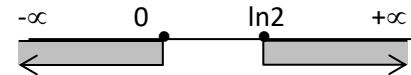
Θέτω $e^x = y$ (2)

οπότε η (1) γίνεται $y^2 - 3y + 2 \geq 0$ (3)

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών του $y^2 - 3y + 2$:

$\Delta = 1, y_1 = 1, y_2 = 2$.

y	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$y^2 - 3y + 2$		+	-	+



(4) $\Leftrightarrow y \leq 1 \text{ ή } y \geq 2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} e^x \leq 1 \text{ ή } e^x \geq 2 \Leftrightarrow \ln e^x \leq \ln 1 \text{ ή } \ln e^x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ή } x \geq \ln 2$.

Άρα $D_f = (-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty)$.

xxii) Επειδή $e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $A = \mathbb{R}$.

3) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \leq 1 \\ x^2 - x, & x > 1 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \leq -2 \\ 3x - 7, & -2 < x \leq 1 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{5x}{\sqrt{x+3}}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$



iv) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = \text{ρητός} \\ 1, & \text{αν } x = \text{άρρητος} \end{cases}$

v) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$

vi) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ 5, & \text{αν } x = 1 \\ -2x + 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- Λύση:** i) $A = \mathbb{R}$.
 ii) $A = (-\infty, -2] \cup (-2, 1] = (-\infty, 1]$.
 iii) $A = (-\infty, 0] \cup (0, 1] = (-\infty, 1]$.

- iv) $A = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.
 v) $A = \mathbb{R}$.
 vi) $A = \mathbb{R}$.

4) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = |3 - 2x|$.

ii) $f(x) = 2|x - 1| + 3$.

iii) $f(x) = \frac{2x-4}{|x-2|}$.

iv) $f(x) = \frac{|x-1| + |x+1|}{2}$.

v) $f(x) = 5x - |x+4| + 2|x-1|$.

vi) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

vii) $f(x) = \frac{|x^2+1| - x^2}{x-2}$.

viii) $f(x) = \frac{|1 - \eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

ix) $f(x) = \frac{|x^2 - 3x| + x - 3}{x^2 - 9}$.

Λύση:

i) $f(x) = |3 - 2x| = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{αν } 3 - 2x \geq 0 \\ -3 + 2x, & \text{αν } 3 - 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{αν } x \leq 3/2 \\ -3 + 2x, & \text{αν } x > 3/2 \end{cases}$

ii) $f(x) = 2|x - 1| + 3 = \begin{cases} 2(x - 1) + 3, & \text{αν } x - 1 \geq 0 \\ -2(x - 1) + 3, & \text{αν } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -2x + 5, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{2x-4}{|x-2|} = \begin{cases} \frac{2(x-2)}{x-2}, & \text{αν } x-2 > 0 \\ \frac{2(x-2)}{-(x-2)}, & \text{αν } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & \text{αν } x > 2 \\ -2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

iv) Κατασκευάζουμε τον πίνακα πρόσημου των $x-1$ και $x+1$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	-	+
$x+1$	-	0	+	+
$ x-1 $	$-x+1$	0	$-x+1$	$x-1$
$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$	$x+1$
f(x)	$\frac{-x+1-x-1}{2} = -x$		$\frac{-x+1+x+1}{2} = 1$	$\frac{x-1+x+1}{2} = x$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leq -1 \\ 1, & \text{αν } -1 < x \leq 1 \\ x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

v) Κατασκευάζουμε τον πίνακα πρόσημου των $x-1$ και $x+4$:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	-	+
$x+4$	-	0	+	+
$ x-1 $	$-x+1$	0	$-x+1$	$x-1$
$ x+4 $	$-x-4$	0	$x+4$	$x+4$
f(x)	$5x-(-x-4)+2(-x+1)=\dots$ $=4x+6$		$5x-(x+4)+2(-x+1)=\dots$ $=2x-2$	$5x-(x+4)+2(x-1)=\dots$ $=6x-6$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} 4x+6, & \text{αν } x \leq -4 \\ 2x-2, & \text{αν } -4 < x \leq 1 \\ 6x-6, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

vi) Κατασκευάζουμε τον πίνακα πρόσημου του x^2-5x+6 :

$$\Delta=1 \text{ και } x_1=2, x_2=3.$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	-	+	

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x^2-5x+6, & \text{αν } x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3 \\ -x^2+5x-6, & \text{αν } 2 < x < 3 \end{cases}$$

vii) $f(x) = \frac{|x^2+1|-x^2}{x^2+1-x^2} = \frac{x^2+1-x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γιατί $x^2+1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

viii) $f(x) = \frac{|1-\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1-\eta\mu x}{1-\eta\mu^2 x} = \frac{x-2}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)} = \frac{1}{1+\eta\mu x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x = k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$, γιατί $\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 1-\eta\mu x \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ix) Είναι $x^2-9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq -3$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα πρόσημου του x^2-3x :

$$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3$$

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
x^2-3x	+	-	0	-	+
$ x^2-3x $	$x^2-3x=x(x-3)$	$x^2-3x=x(x-3)$	0	$-(x^2-3x)=-x(x-3)$	$x^2-3x=x(x-3)$
f(x)	$\frac{x(x-3)+(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$	$\frac{x(x-3)+(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$		$\frac{-x(x-3)+(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(1-x)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{1-x}{x+3}$	$\frac{x(x-3)+(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+3}, & \text{αν } x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0] \cup (3, +\infty) \\ \frac{1-x}{x+3}, & \text{αν } x \in (0, 3) \end{cases}$$



5) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες:

i) $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-4}$

ii) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$

iii) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

iv) $f(x) = x + \frac{2}{x}$

v) $f(x) = 1 - \eta\mu x$

vi) $f(x) = \frac{4}{x-1}$

vii) $f(x) = \frac{2\eta\mu x - 1}{x^2 + 1}$

viii) $f(x) = \sqrt{x-6}$

ix) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$

x) $f(x) = \sqrt{2} + 2\sigma\upsilon\nu x$

Λύση:

i) $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$.

$f(0) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, -1/2)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x - 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$ (1)

 $\Delta = -7 < 0$ και η (1) είναι αδύνατη.Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'Ox$.

ii) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$f(0) = \frac{-2}{-1} = 2$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, 2)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ (1)

 $\Delta = 9$ και $x_1 = -1, x_2 = 2$.Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $B(-1, 0)$ και $\Gamma(2, 0)$.

iii) $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

$f(0) = \frac{-9}{-3} = 3$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, 3)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (γιατί $3 \notin A_f$).

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

iv) $D_f = \mathbb{R}^*$.

Επειδή $0 \notin D_f$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $y'Oy$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} = 0$ που είναι αδύνατη.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'Ox$.

v) $D_f = \mathbb{R}$.

$f(0) = 1 - \eta\mu 0 = 1 - 0 = 1$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, 1)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $B(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$.

vi) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$f(0) = \frac{4}{0-1} = -4$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, -4)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 4 = 0$ που είναι αδύνατη.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'Ox$.

vii) $D_f = \mathbb{R}$.

$f(0) = \frac{2\eta\mu 0 - 1}{0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, -1)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\eta\mu x - 1}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $B(2k\pi + \frac{\pi}{6}, 0)$ και $\Gamma(2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 0), k \in \mathbb{Z}$.

viii) $D_f = [6, +\infty)$.

Επειδή $0 \notin D_f$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $y'Oy$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-6} = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στο σημείο $B(6, 0)$.

ix) $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$f(0) = \ln 9$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, \ln 9)$.

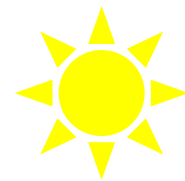
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 6x + 9) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$.

 $\Delta = 4$ και $x_1 = 4, x_2 = 2$.Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $B(4, 0)$ και $\Gamma(2, 0)$.

x) $D_f = \mathbb{R}$.

$f(0) = \sqrt{2} + 2\sigma\upsilon\nu 0 = 2 + \sqrt{2}$. Τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, 2 + \sqrt{2})$.

Χρρρρρρ



$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}+2\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=-\sqrt{2}/2 \Leftrightarrow \sin x=\sin(\pi-\pi/4)=\sin^{3\pi/4} \Leftrightarrow x=2k\pi \pm 3\pi/4, k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $B(2k\pi \pm 3\pi/4, 0), k \in \mathbb{Z}.$

6) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=-x^2+6x-8$ και $g(x)=\frac{4-x}{x}$

v) $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=2$

ii) $f(x)=(x-1)^2$ και $g(x)=\frac{2}{x}$

vi) $f(x)=\ln(x+2)$ και $g(x)=0$

iii) $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$

vii) $f(x)=8x^4-28x^3-6$ και $g(x)=-22x^2-7x$

iv) $f(x)=3^{x^2-5x+6}$ και $g(x)=1$

viii) $f(x)=\sqrt{3x+4}$ και $g(x)=7-\sqrt{x+5}$

Λύση:

i) $D_f=\mathbb{R}$ και $D_g=\mathbb{R}^*$.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x^2+6x-8=\frac{4-x}{x} \Leftrightarrow -x^3+6x^2-7x-4=0 \dots\dots\dots (1)$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm 1, \pm 2, \pm 4.$

-1	6	-7	-4	4
↓	-4	8	4	
-1	2	1	0	

$$\begin{aligned} H(1) &\Leftrightarrow (x-4)(-x^2+2x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } -x^2+2x+1=0 \\ &\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=1+\sqrt{2} \text{ ή } x=1-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

• $x=4.$ Τότε $y=f(4)=g(4)=\dots=0.$ **Σημείο A(4,0).**

• $x=1+\sqrt{2}.$ Τότε $y=f(1+\sqrt{2})=g(1+\sqrt{2})=\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{(3-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\dots=4\sqrt{2}-5.$

Σημείο B(1+\sqrt{2}, 4\sqrt{2}-5).

• $x=1-\sqrt{2}.$ Τότε $y=f(1-\sqrt{2})=g(1-\sqrt{2})=\frac{3+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\dots=-4\sqrt{2}-5.$

Σημείο Γ(1-\sqrt{2}, -4\sqrt{2}-5).

ii) $D_f=\mathbb{R}$ και $D_g=\mathbb{R}^*.$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{2}{x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^3-2x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)+(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2)=0 \text{ και επειδή } x^2+2 \neq 0 \Leftrightarrow x=2.$$

$y=f(2)=g(2)=1.$

Άρα τέμνονται στο σημείο A(2,1)

iii) $D_f=D_g=\mathbb{R}.$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3=x \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \text{ ή } x_2=1 \text{ ή } x_3=-1.$$

$y_1=f(0)=g(0)=0.$

$y_2=f(1)=g(1)=1.$

$y_3=f(-1)=g(-1)=-1.$

Άρα τέμνονται στα σημεία A(0,0), B(1,1) και Γ(-1,-1).

iv) $D_f=D_g=\mathbb{R}.$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+6}=3^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$\Delta=1$ και $x_1=2$ ή $x_2=3.$

$y_1=f(2)=g(2)=1.$

$y_2=f(3)=g(3)=1.$

Άρα τέμνονται στα σημεία A(2,1) και B(3,1).

v) Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1,$ η εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x=2$ είναι αδύνατη και οι γραφικές παραστάσεις δεν τέμνονται.

vi) $D_f=(-2, +\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}.$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln(x+2)=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=\ln 1 \Leftrightarrow x+2=1 \Leftrightarrow x=-1.$$

$Y=f(-1)=g(-1)=0$

Άρα τέμνονται στο σημείο A(-1,0).

vii) $D_f=D_g=\mathbb{R}.$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 8x^4-28x^3-6x=-22x^2-7x \Leftrightarrow 8x^4-28x^3+22x^2+7x-6=0 \dots\dots\dots (1)$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$

8	-28	22	7	-6	2
↓	16	-24	-4	6	
8	-12	-2	3	0	

$$\begin{aligned} H(1) &\Leftrightarrow (x-2)(8x^3-12x^2-2x+3)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-\frac{3}{2})(8x^2-2)=0 \\ &\Leftrightarrow x_1=2 \text{ ή } x_2=\frac{3}{2} \text{ ή } x_3=\frac{1}{2} \text{ ή } x_4=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα τέμνονται στα σημεία:



8	-12	-2	3	3/2
↓	12	0	-3	
8	0	-2	0	

$y_1=f(2)=g(2)=\dots=-102$. Άρα **A(2,102)**.
 $y_2=f(3/2)=g(3/2)=\dots=-60$ Άρα **B(3/2,-60)**.
 $y_3=f(1/2)=g(1/2)=\dots=-9$. Άρα **Γ(1/2,-9)**.
 $y_4=f(-1/2)=g(-1/2)=\dots=-2$. Άρα **Δ(-1/2,-2)**.

viii) $D_f=[-4/3, +\infty)$ και $D_g=[-5, +\infty)$.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = 7 - \sqrt{x+5}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+4})^2 = (7 - \sqrt{x+5})^2$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = 49 - 14\sqrt{x+5} + x+5$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{x+5} = 25 - x$$

$$\Leftrightarrow (7\sqrt{x+5})^2 = (25-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 49(x+5) = 625 - 50x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 99x + 380 = 0$$

$$\Delta = 8.281 \text{ και } x_1 = 95 \text{ (απορρ.) και } x_2 = 4$$

$$y_2 = f(4) = g(4) = \dots = 4.$$

Άρα τέμνονται στο σημείο **B(4,4)**.

25-x ≥ 0 ⇔ x ≤ 25

7) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι:

- α) πάνω από τον άξονα των x'Οx,
- β) κάτω από τον άξονα των x'Οx,

στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) $f(x) = -3x^2 + 10x - 3$
- ii) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
- iii) $f(x) = e^{x^2-3x+2} - 1$
- iv) $f(x) = \ln(x+3)$
- v) $f(x) = \ln x + 3$
- vi) $f(x) = 2^x - 10$
- vii) $f(x) = \log_3(x^2 + 2x - 1)$
- viii) $f(x) = |\ln x| - 2$
- ix) $f(x) = 2 + \eta\mu x$

Λύση:

i) $D_f = \mathbb{R}$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών του τριωνύμου $-3x^2 + 10x - 3$.

$\Delta = 64, x_1 = 1, x_2 = 1/3$.

x	$-\infty$	1/3	1	$+\infty$
$-3x^2+10x-3$	-		+	-

- α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1/3, 1)$
- β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$.

ii) $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x-1	-		-	+
x+2	-		+	+
$\frac{x-1}{x+2}$	+		-	+

- α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
- β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$.

iii) $D_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} = e^0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0$.

$\Delta = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$.

α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} > 1$
 $\Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} > e^0$
 $\Leftrightarrow x^2-3x+2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 2$.

β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} - 1 < 0$
 $\Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} < 1$
 $\Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} < e^0$
 $\Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	+		-	+



iv) $D_f = (-3, +\infty)$.

α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) > \ln 1 \Leftrightarrow x+3 > 1 \Leftrightarrow x > -2$.

β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) < 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) < \ln 1 \Leftrightarrow x+3 < 1 \Leftrightarrow x < -2$ και επειδή $x > -3$, θα έχουμε $-3 < x < -2$.

v) $D_f = (0, +\infty)$.

α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -3 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-3} \Leftrightarrow \ln x > \ln \frac{1}{e^3} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e^3}$.

β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 3 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -3 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-3} \Leftrightarrow \ln x < \ln \frac{1}{e^3} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e^3}$.

vi) $D_f = \mathbb{R}$.

α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2^x - 10 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 10 \Leftrightarrow \ln 2^x > \ln 10 \Leftrightarrow x \ln 2 > \ln 10 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 10}{\ln 2} \Leftrightarrow x > \log_2 10$.

γιατί $\ln 2 > \ln 1 = 0$

β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < \log_2 10$.

vii) $D_f = (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty)$.

α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{3}{4}}(x^2 + 2x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{4}}(x^2 + 2x - 1) > \log_{\frac{3}{4}} 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 < 1$ (γιατί $a = 3/4 < 1$ και η συνάρτηση $\varphi(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$, είναι γνησίως φθίνουσα).

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow x \in (-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{3})$.

β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}, +\infty)$.

viii) $D_f = (0, +\infty)$.

α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow |\ln x| - 2 > 0 \Leftrightarrow |\ln x| > 2$

$\Leftrightarrow \ln x < -2$ ή $\ln x > 2$

$\Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-2}$ ή $\ln x > \ln e^2$

$\Leftrightarrow x < e^{-2}$ ή $x > e^2$

β) $f(x) < 0 \Leftrightarrow |\ln x| - 2 < 0$

$\Leftrightarrow |\ln x| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < \ln x < 2$

$\Leftrightarrow \ln e^{-2} < \ln x < \ln e^2$

$\Leftrightarrow e^{-2} < x < e^2$



ix) $D_f = (0, +\infty)$.

Επειδή $-2 < -1 \leq \eta \mu x \Rightarrow \eta \mu x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γρ. παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'Ox$.

8) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:

α) πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g ,

β) κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g ,

στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $f(x) = x^2$ και $g(x) = 5x - 6$.
- ii. $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = 5$.
- iii. $f(x) = \eta \mu x$ και $g(x) = 1/2$, $x \in [0, \pi]$.
- iv. $f(x) = x^3 - 1$ και $g(x) = -x^2 + x$.
- v. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1$.
- vi. $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$ και $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- vii. $f(x) = x^3 - x^2$ και $g(x) = 4x - 4$.
- viii. $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha = \text{σταθερός πραγματικός με } \alpha > 4$ και $g(x) = 4x - 1$.
- ix. $f(x) = \eta \mu x$ και $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.
- x. $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$ και $g(x) = -\frac{1}{2}$, $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.
- xi. $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$.
- xii. $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x| + 6$.
- xiii. $f(x) = \frac{4}{x^2}$ και $g(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$.
- xiv. $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x$.
- xv. $f(x) = -\frac{1}{x}$ και $g(x) = x$.
- xvi. $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$.
- xvii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
- xviii. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ και $g(x) = -\ln(2x-1)$.

Λύση:

i. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 > 5x - 6$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 < 5x - 6$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$
 $\Leftrightarrow x \in (2, 3)$.

ii. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow |x - 2| > 5$
 $\Leftrightarrow x - 2 < -5$ ή $x - 2 > 5$
 $\Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 7$.

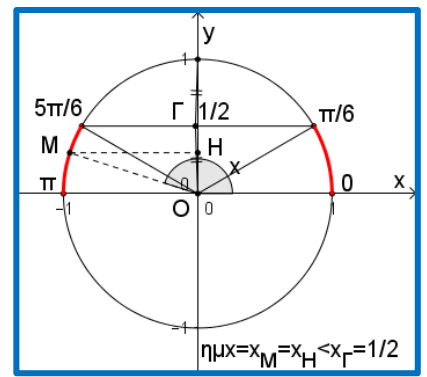
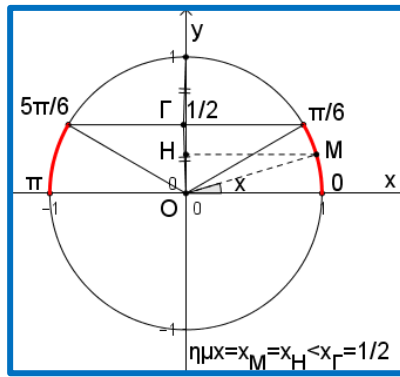
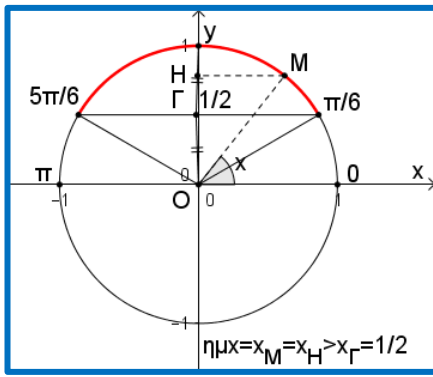
β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x - 2| < 5$
 $\Leftrightarrow -5 < x - 2 < 5$
 $\Leftrightarrow -3 < x < 7$.

iii. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \eta \mu x > 1/2$
 $\Leftrightarrow x \in (\pi/6, 5\pi/6)$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \eta \mu x < 1/2$
 $\Leftrightarrow x \in [0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi]$.

$\Delta = 25 - 24 = 1$ και $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	-	+	



iv. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 - 1 > -x^2 + x$
 $\Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow x^2(x+1) - (x+1) > 0$
 $\Leftrightarrow x^2(x+1) - (x+1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x^2-1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x-1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) > 0$
 $\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ και } x-1 > 0$
 $\Leftrightarrow x > 1.$

$(x+1)^2 \geq$

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^3 - 1 < -x^2 + x$
 $\Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 < 0$
 $\Leftrightarrow x^2(x+1) - (x+1) < 0$
 $\Leftrightarrow x^2(x+1) - (x+1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x^2-1) < 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x-1) < 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) < 0$
 $\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ και } x-1 < 0$
 $\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ και } x < 1.$

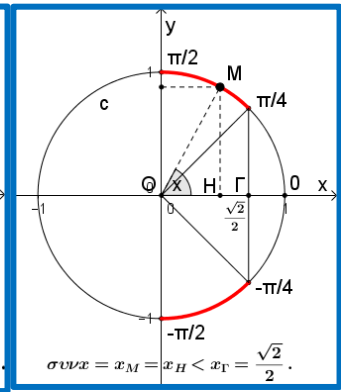
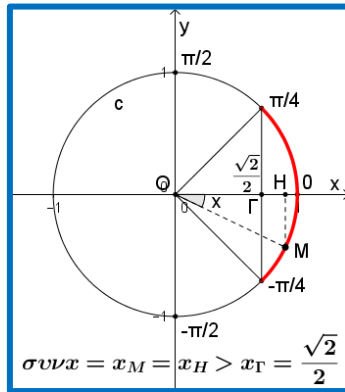
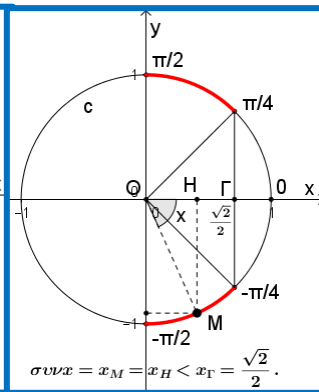
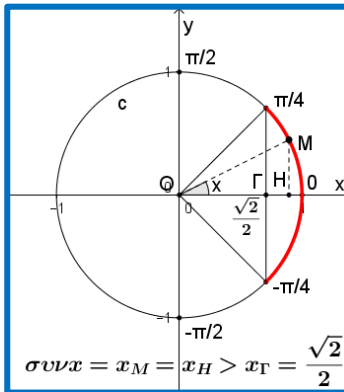
$(x+1)^2 \geq$

v. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \ln x > 1$
 $\Leftrightarrow \ln x > \ln e$
 $\Leftrightarrow x > e.$
 γιατί η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \ln x < 1$
 $\Leftrightarrow \ln x < \ln e$
 $\Leftrightarrow x < e.$
 γιατί η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

vi. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\Leftrightarrow x \in (-\pi/2, -\pi/4) \cup (\pi/4, \pi/2).$

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



vii. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 4x - 4$
 $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$
 $\Leftrightarrow x^2(x-1) - 4(x-1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) > 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-2) > 0$
 $\Leftrightarrow x \in (-2, 1) \cup (2, +\infty).$
β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 4x - 4$
 $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2).$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$(x-1)(x+2)(x-2)$	- ○	+ ○	- ○	+	

viii. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow ax^2 > 4x - 1$
 $\Leftrightarrow ax^2 - 4x + 1 > 0$

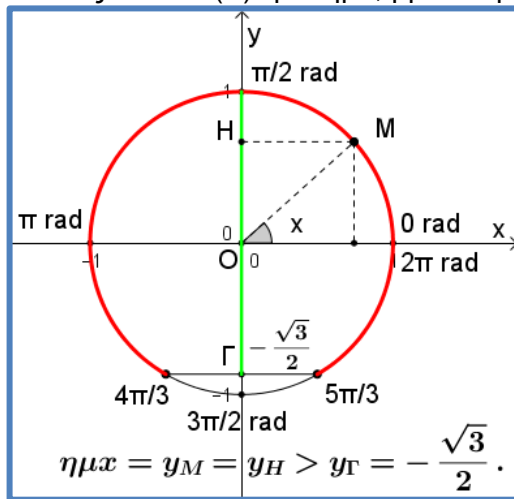
που είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $a=4 > 0$ και $\Delta=16-4a < 0$ (γιατί $a > 4$).

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow ax^2 < 4x - 1$
 $\Leftrightarrow ax^2 - 4x + 1 < 0$ που είναι αδύνατη.

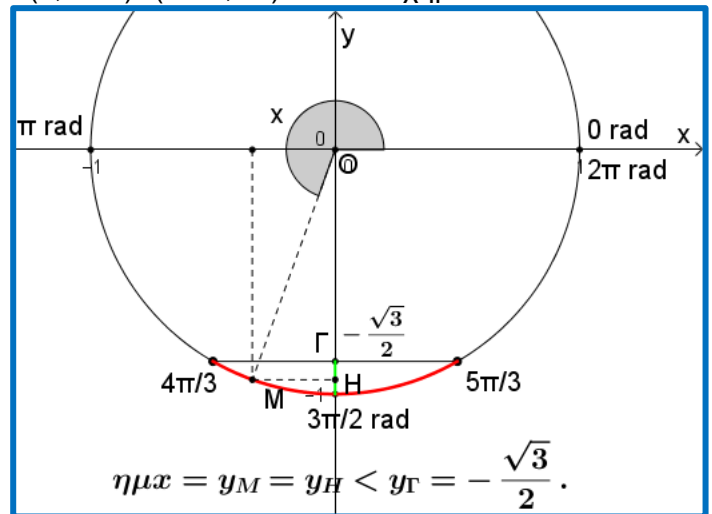
Άρα δεν υπάρχει τιμή του x , που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

ix. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Όπως και στο (iii) ερώτημα, βρίσκουμε $x \in (0, 4\pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi)$. Βλέπε σχήμα 1.



σχήμα 1

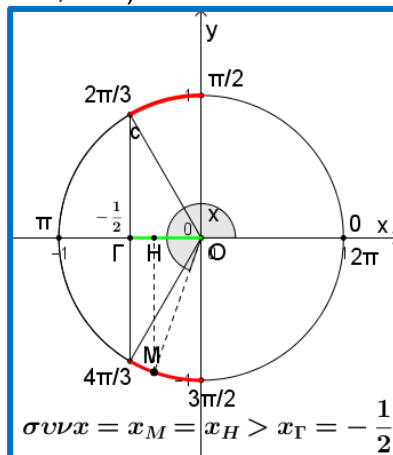
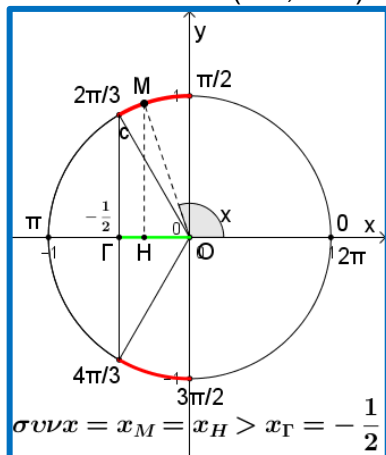


σχήμα 2

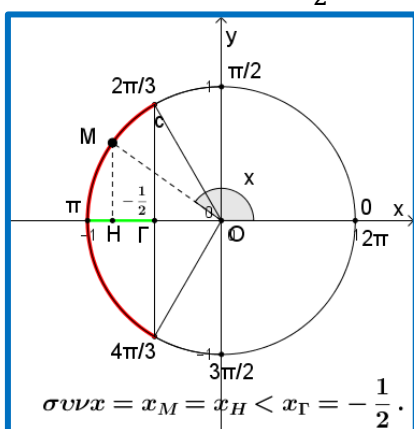
β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in (4\pi/3, 5\pi/3)$.
Βλέπε σχήμα 2.

x. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in (\pi/2, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 3\pi/2)$.



β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (2\pi/3, 4\pi/3)$.



xi. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^4 > 2 - x^2$
 $\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 > 0 \dots \dots \dots (1)$

Θέτω $x^2 = \omega \geq 0 \dots \dots \dots (2)$

οπότε η (1) γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 > 0 \dots \dots (3)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$ και $\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \omega_1 = 1 \\ \omega_2 = -2 \end{cases}$.

ω	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\omega^2 + \omega - 2$	+	-	+	

Επειδή $\omega \geq 0$, (3) $\Leftrightarrow \omega > 1$
 $\Leftrightarrow x^2 > 1$
 $\Leftrightarrow |x| > 1$
 $\Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

xiii. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 > |x| + 6$
 $\Leftrightarrow x^2 - |x| - 6 > 0$
 $\Leftrightarrow |x|^2 - |x| - 6 > 0 \dots \dots \dots (1)$

Θέτω $|x| = \omega \geq 0 \dots \dots \dots (2)$

οπότε η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 6 > 0 \dots \dots (3)$

$\Delta = 1 + 24 = 25$ και $\omega_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \omega_1 = 3 \\ \omega_2 = -2 \end{cases}$

ω	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$\omega^2 + \omega - 2$	+	-	+	+

Επειδή $\omega \geq 0$, (3) $\Leftrightarrow \omega > 3$
 $\Leftrightarrow |x| > 3$
 $\Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 3$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

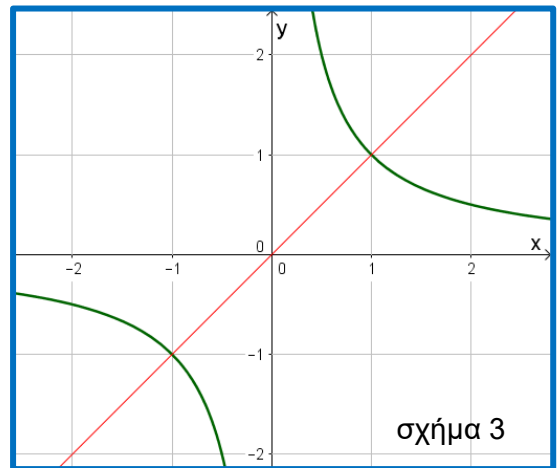
xiii. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} > -x^4 + 4x^2 + 1, x \neq 0$
 $\Leftrightarrow 4 > -x^6 + 4x^4 + x^2$
 $\Leftrightarrow x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 > 0$
 $\Leftrightarrow x^4(x^2 - 4) - (x^2 - 4) > 0$
 $\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^4 - 1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 - 1)(x^2 + 1) > 0$ και επειδή $x^2 + 1 > 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 - 1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) > 0$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$	+	-	+	+	-	+	+

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

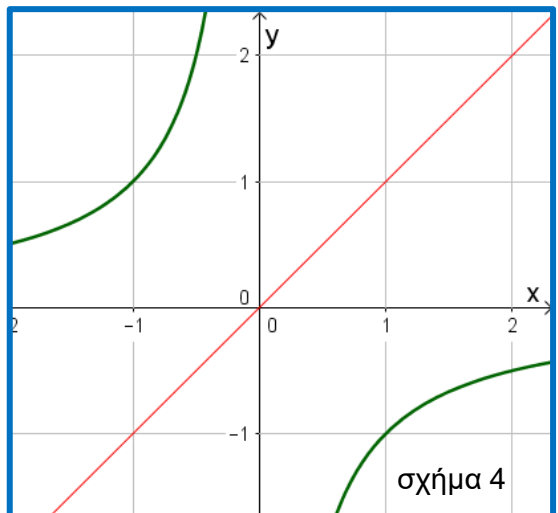
xiv. α) $f(x) > g(x)$.
 Από τη γραφική παράσταση των $f(x)$ και $g(x)$ (σχήμα 3), είναι προφανές ότι:
 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
 (Η λύση μπορεί να βρεθεί και αλγεβρικά).



σχήμα 3

β) $f(x) < g(x)$.
 Ομοίως $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

xv. α) $f(x) > g(x)$
 Από τη γραφική παράσταση των $f(x)$ και $g(x)$ (σχήμα 4), είναι προφανές ότι $x \in (-\infty, 0)$.
 (Η λύση μπορεί να βρεθεί και αλγεβρικά).



σχήμα 4

β) $f(x) < g(x)$.
 Ομοίως $x \in (0, +\infty)$.

xvi. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow e^x > e^{-x}$
 $\Leftrightarrow e^{2x} > 1$
 $\Leftrightarrow e^{2x} > e^0$
 $\Leftrightarrow e^{2x} > e^0$
 $\Leftrightarrow 2x > 0$
 $\Leftrightarrow x > 0$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < 0$.

xvii. α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \ln x > \ln\left(\frac{1}{x}\right), x > 0$
 $\Leftrightarrow x > \frac{1}{x}$ και επειδή $x > 0$
 $\Leftrightarrow x^2 > 1$
 $\Leftrightarrow x > 1$, γιατί $x > 0$.

β) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

xviii. Προφανώς $\frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1 \dots \dots \dots (1)$

Επίσης $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/2 \dots \dots \dots (2)$

Οι (1) και (2) συναληθεύουν για $x > 1.$

α) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > -\ln(2x-1) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > \ln\left(\frac{1}{2x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} > \frac{1}{2x-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1) > x+1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) > 0$ και επειδή $x > 1 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

9. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις (C_f) των παρακάτω συναρτήσεων και μετά, από αυτές να βρείτε το πεδίο τιμών τους:

i) $f(x) = 3x - 2,$

ii) $f(x) = 4x - 3,$ με $A = [2, 3]$

iii) $f(x) = 4 - 2x,$ με $A = (-1, 2]$

iv) $f(x) = e^x,$ με $x \in (0, 4]$

v) $f(x) = 3x - 1,$ με $x \geq 2$

vi) $f(x) = 5 - 2x,$ με $x < 7$

vii) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

viii) $f(x) = \begin{cases} -x + 4, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x - 1, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

ix) $f(x) = \frac{|x-3|}{3-x} - 2x$

x) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$

xi) $f(x) = |x+3| - 3|x-2|$

xii) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

xiii) $f(x) = |x| + |x-3|$

xiv) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ 2x - 3, & \text{αν } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$

xv) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2, & \text{αν } -1 \leq x < 1 \\ -x + 2, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$



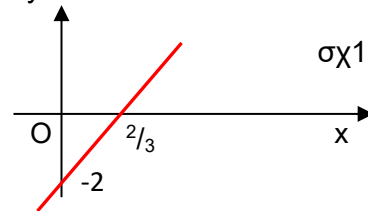
Λύση:

i) $f(x) = 3x - 2, D_f = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Επειδή είναι στην μορφή $f(x) = ax + \beta,$ η C_f είναι ευθεία.

$f(0) = -2$

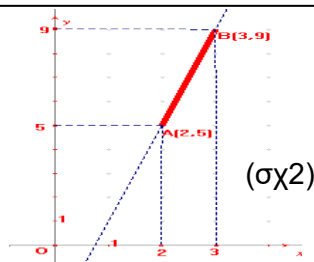
και $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2/3. (\sigma\chi 1)$



ii) $f(x) = 4x - 3, D_f = [2, 3].$

$f(2) = 5$ και $f(3) = 9$

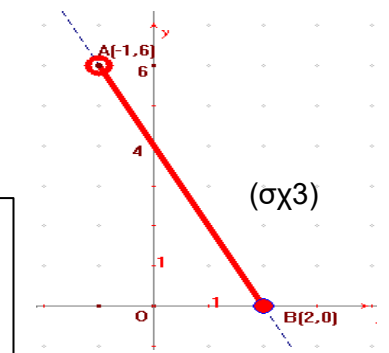
Η C_f είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(2, 5), B(3, 9)$ συμπεριλαμβανομένων των άκρων. ($\sigma\chi 2$)



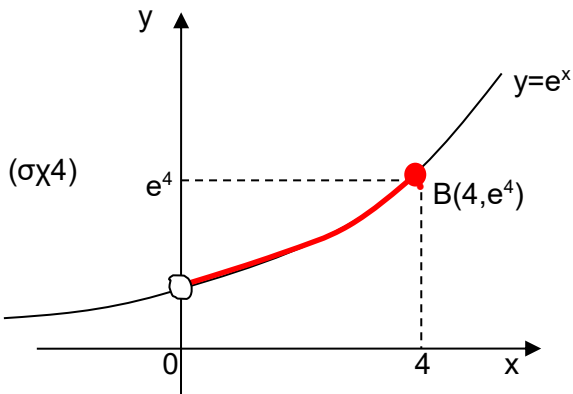
iii) $f(x) = 4 - 2x, D_f = (-1, 2].$

$f(2) = 0$ και $f(-1) = 6.$

Η C_f είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(-1, 6), B(2, 0)$ πλην του σημείου $A.$ ($\sigma\chi 3$)



iv) $f(x) = e^x, D_f = (0, 4]. \sigma\chi 4$

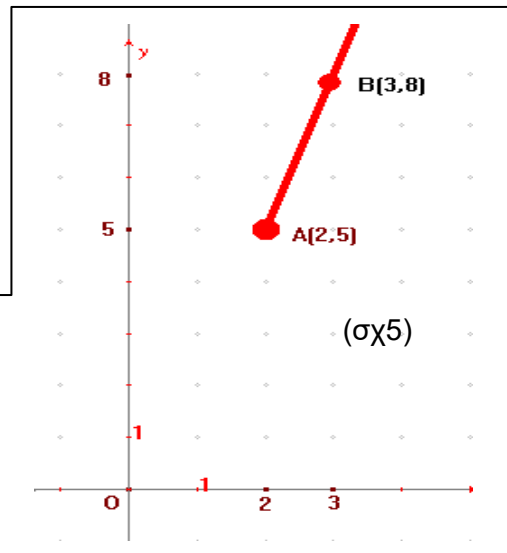


v) $f(x) = 3x - 1, \text{ με } x \geq 2.$

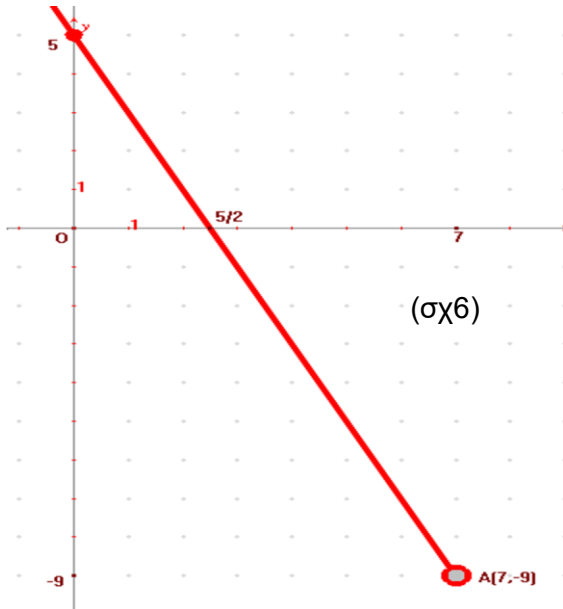
$f(2) = 5$ και $f(3) = 8.$

Η C_f είναι η ημιευθεία AB με $A(2, 5), B(3, 8).$

($\sigma\chi 5$)



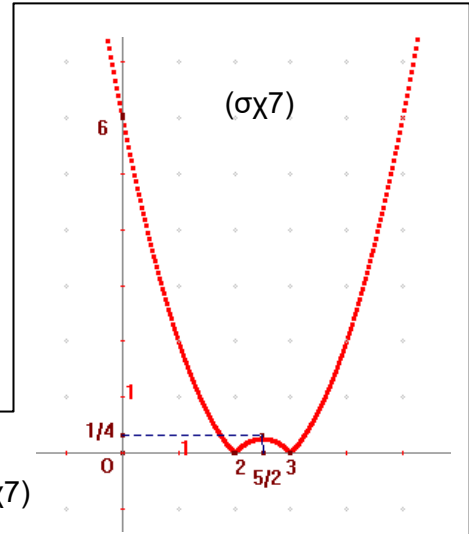
vj) $f(x)=5-2x$, με $x<7$



$f(7)=-9$, $f(0)=5$ και $f(5/2)=0$.

Η C_f είναι η ημιευθεία AB με $A(7,-9)$, $B(0,5)$

Εκτός του σημείου A. (σχ6)



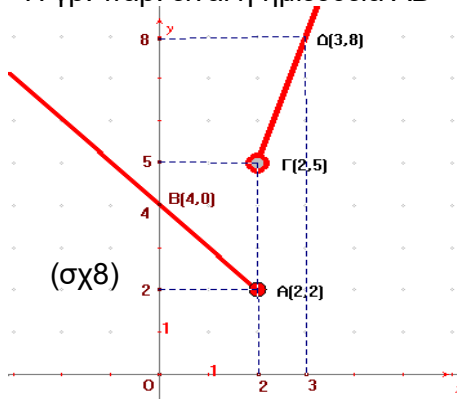
vii) $f(x)=|x^2-5x+6|=\dots=\begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \in (-\infty,2) \cup (3, +\infty) \\ -x^2 + 5x - 6, & x \in [2,3] \end{cases}$ (σχ7)

viii) $f(x) = \begin{cases} -x + 4, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x - 1, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

• Για $x \leq 2$ είναι $f(x)=-x+4$

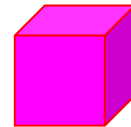
x	0	2
f(x)	4	2

Η γρ. παρ. είναι η ημιευθεία AB

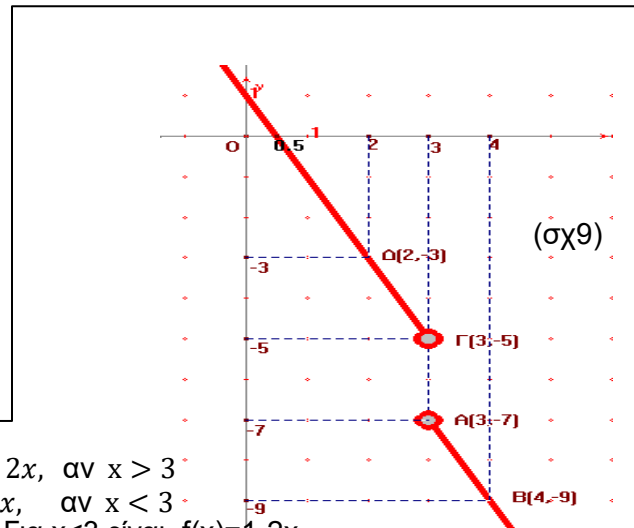


• Για $x > 2$ είναι $f(x)=3x-1$

x	2	3
f(x)	5	8



Η γρ. παρ. είναι η ημιευθεία ΓΔ πλην του σημείου Γ.



ix) $f(x) = \frac{|x-3|}{3-x} - 2x = \begin{cases} \frac{x-3}{3-x} - 2x, & \text{αν } x-3 > 0 \\ \frac{3-x}{3-x} - 2x, & \text{αν } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 - 2x, & \text{αν } x > 3 \\ 1 - 2x, & \text{αν } x < 3 \end{cases}$

• Για $x > 3$ είναι $f(x)=-1-2x$

x	3	4
f(x)	-7	-9

Η γρ. παρ. είναι η ημιευθεία AB πλην του σημείου A (σχ. 9).

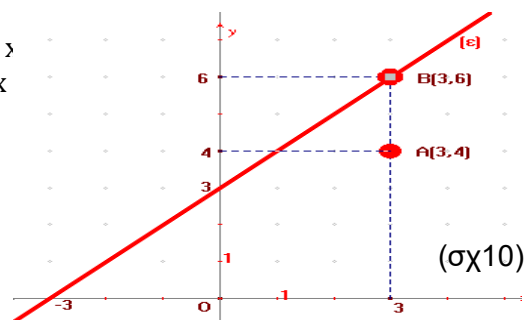
• Για $x < 3$ είναι $f(x)=1-2x$

x	2	3
f(x)	-3	-5

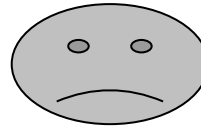
Η γρ. παρ. είναι η ημιευθεία ΓΔ πλην του σημείου Γ (σχ. 9).

x) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases} = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$

Η γραφική παράσταση αποτελείται από το σημείο A και την ευθεία (ε) πλην του σημείου B. (σχ10)



xj) $f(x)=|x+3|-3|x-2|$
 Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών για τα $x+3$ και $x-2$ ώστε να βγάλουμε τις απόλυτες τιμές:



x	$-\infty$	-3	2	$(\sigma\chi 10)$	$+\infty$
$x+3$	-	0	+		+
$x-2$	-		-	0	+
$ x+3 $	$-x-3$	0	$x+3$		$x+3$
$ x-2 $	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$
f(x)	$(-x-3)-3(-x+2)=2x-9$		$(x+3)-3(-x+2)=4x-3$		$(x+3)-3(x-2)=-2x+9$

Άρα $f(x) = \begin{cases} 2x-9, & \text{αν } x < -3 \\ 4x-3, & \text{αν } -3 \leq x < 2. \\ -2x+9, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

• Για $x < -3$ είναι $f(x)=2x-9$

x	-3	-4
f(x)	-15	-17

Η γρ.παρ. είναι η ημιευθεία ΑΓ πλην του σημείου Α.

• Για $-3 \leq x < 2$ είναι $f(x)=4x-3$

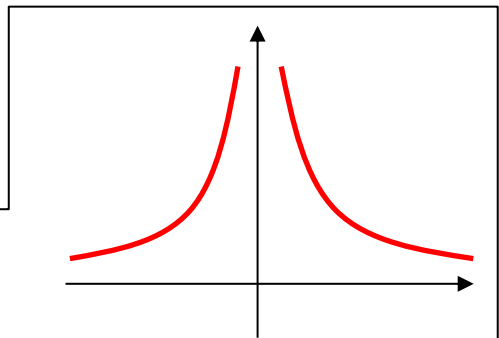
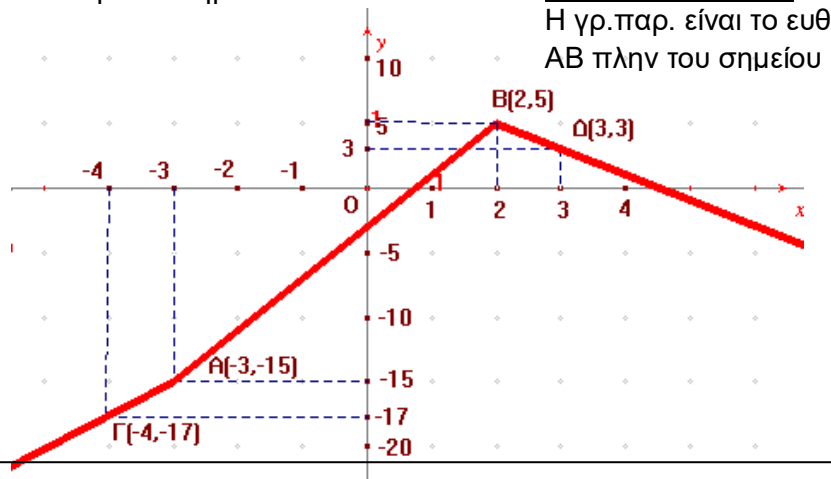
x	-3	2
f(x)	-15	5

Η γρ.παρ. είναι το ευθ. τμήμα ΑΒ πλην του σημείου Β.

• Για $x \geq 2$ είναι $f(x)=-2x+9$

x	2	3
f(x)	5	3

Η γρ.παρ. είναι η ημιευθεία ΒΔ.



xii) $f(x) = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

xiii) $f(x)=|x|+|x-3|$
 Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών για τα $x-3$ και x ώστε να βγάλουμε τις απόλυτες τιμές:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
$x-3$	-		-	0	
$ x $	$-x$	0	x		
$ x-3 $	$-x+3$		$-x+3$	0	
f(x)	$-2x+3$		3		$2x-3$

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{αν } x < 0 \\ 3, & \text{αν } 0 \leq x < 3. \\ 2x-3, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$

• Για $x < 0$ είναι $f(x)=-2x+3$

x	0	-1
f(x)	3	5

Η γρ.παρ. είναι η ημιευθεία ΑΒ πλην του σημείου Α

• Για $0 \leq x < 3$ είναι $f(x)=3$

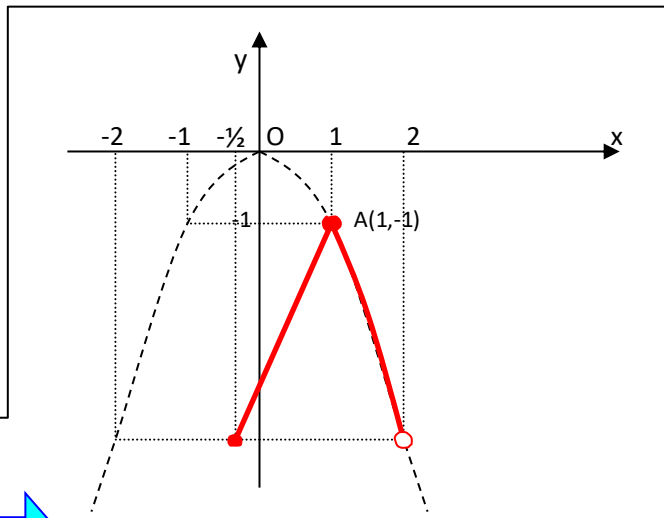
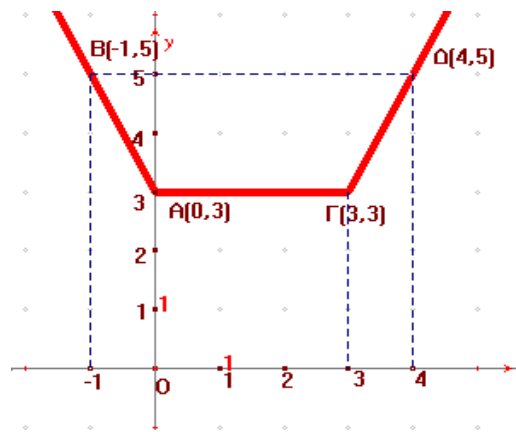
x	0	3
f(x)	3	3

Η γρ. παρ. είναι το ευθ. τμήμα ΑΓ πλην του σημείου Γ.

• Για $x \geq 3$ είναι $f(x)=2x-3$

x	3	4
f(x)	3	5

Η γρ.παρ. είναι η ημιευθεία ΓΔ.

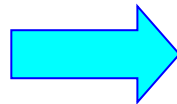


xiv) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ 2x - 3, & \text{αν } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$

• Για $1 \leq x < 2$ είναι $f(x) = -x^2$

Η γρ. παρ. είναι το τμήμα της γρ. παρ. της $f(x) = -x^2$ μεταξύ των σημείων A και B, πλην του σημείου B.

x	1	2
f(x)	-1	-4

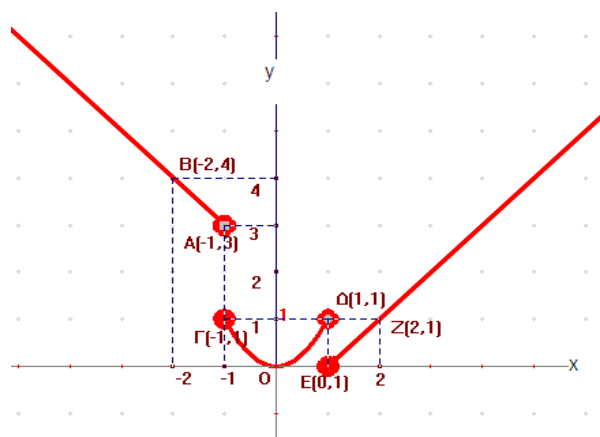


• Για $-\frac{1}{2} \leq x < 1$ είναι $f(x) = 2x - 3$

x	$-\frac{1}{2}$	1
f(x)	-4	-1

Η γρ. παρ. είναι το ευθ. τμήμα ΑΓ πλην του σημείου Γ.

xv) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2, & \text{αν } -1 \leq x < 1 \\ -x + 2, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$



10) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$,.....(1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να δείξετε ότι: α) $f(0) = 0$ β) η f είναι περιττή

Λύση:

α) Στην (1) θέτουμε $x=0$:

$$f(0+y) = f(0) + f(y) \Leftrightarrow$$

$$f(y) = f(0) + f(y) \Leftrightarrow$$

$$f(0) = 0$$

β) Η (1) για $y = -x$ δίνει:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow$$

$$f(0) = f(x) + f(-x) \text{ και επειδή } f(0) = 0$$

$$0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ άρα περιττή.}$$

11) Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: α) $f(0) = 1$ β) η f είναι άρτια.

Λύση:

α) Στην δοθείσα θέτουμε $y=0$:

$$f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)f(0) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = 2f(x)f(0)$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) = 2f(x)f(0)$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) - 2f(x)f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2f(x)(1-f(0)) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Εάν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι σταθερή, άτοπο.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$, οπότε η (1) δίνει $1 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$.

β) Στην δοθείσα θέτουμε $x=0$:

$$f(0+y) + f(0-y) = 2f(0)f(y) \Leftrightarrow f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) \text{ και επειδή } f(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(y)+f(-y)=2f(y)$$

$$\Leftrightarrow f(-y)=2f(y)-f(y)$$

$$\Leftrightarrow f(-y)=f(y) \text{ άρα άρτια.}$$

12) Να βρείτε συνάρτηση f , τέτοια ώστε $f(x) + 2f(1/x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Λύση: Στην δοθείσα θέτουμε όπου x το $1/x$:

$$f(1/x) + 2f(x) = 1/x \Leftrightarrow f(1/x) = 1/x - 2f(x)$$

και η δοθείσα γίνεται:

$$f(x) + 2\left(\frac{1}{x} - 2f(x)\right) = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = \frac{2-x^2}{3x}.$$

13) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, αλλά έχουν ίδιο τύπο, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} , στο οποίο είναι $f(x)=g(x)$:

i) $f(x) = \frac{x^2+2|x|}{x^2-4}$ και $g(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$

iii) $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ και $g(x) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

ii) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

iv) $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ και $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$

Λύση: **i)** $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$$\text{και } f(x) = \frac{x^2+2|x|}{x^2-4} = \frac{|x|^2+2|x|}{|x|^2-4} = \frac{|x|(|x|+2)}{(|x|-2)(|x|+2)} = \frac{|x|}{|x|-2} = g(x).$$

Άρα $f=g$.

ii) Είναι $D_f = D_g = [0, +\infty)$ και επομένως είναι ίσες, γιατί:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})} = \frac{2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x})^2} = \frac{2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})}{x+2-x}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})}{2} = \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = g(x).$$

iii) $D_f = D_g = [0, +\infty)$.

$$f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \ln \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \ln \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \ln \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \ln \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \ln 1 - \ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = g(x). \text{ Άρα } f=g.$$

iv) Είναι $D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, ενώ $D_g = [1, +\infty)$ και επομένως $f \neq g$.

Στο σύνολο όμως $A = D_f \cap D_g = [1, +\infty)$ είναι προφανώς ίσες.



14) Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$, fg και f/g , όταν:

i) $f(x) = \frac{-3x+2}{x-4}$ και $g(x) = \frac{x^2+3}{x-5}$

v) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$ και $g(x) = \frac{x^2+x+1}{1-x}$

ii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x}$

vi) $f(x) = \frac{1}{|x+2|-1}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2+3x+2}$

iii) $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$

vii) $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \sqrt{x^2+x}$

iv) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x+2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

viii) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ και $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$

και $g(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{αν } x \leq -1 \\ 4-7x, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$

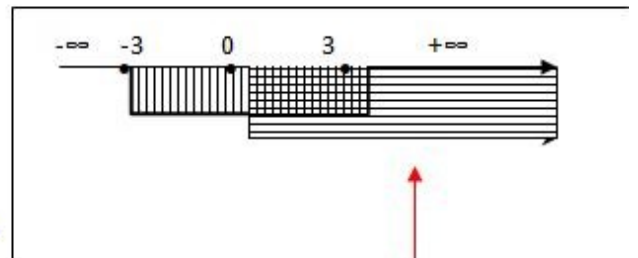
ix) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

Λύση: **i)** $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$ και $D_g = \mathbb{R} - \{5\}$ και επειδή $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in D_g$, θα είναι $D_{f+g} = D_{fg} = D_{f/g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{4, 5\}$ και έχουν τύπους:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{-3x+2}{x-4} + \frac{x^2+3}{x-5}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{-3x+2}{x-4} \cdot \frac{x^2+3}{x-5} \text{ και}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{-3x+2}{x-4} : \frac{x^2+3}{x-5} = \frac{-3x+2}{x-4} \cdot \frac{x-5}{x^2+3}$$



ii) $D_f = [-3, 3]$ και $D_g = (0, +\infty)$ και επειδή $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, θα είναι $D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = [0, 3]$ και $D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\} = (0, 3]$ και έχουν τύπους:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{x},$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{9-x^2} \sqrt{x} = \sqrt{x(9-x^2)} = \sqrt{9x-x^3} \text{ και}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{9-x^2}{x}}$$

iii) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ και έχουν τύπους:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^x},$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = e^x e^{-x} = e^0 = 1 \text{ και}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = e^x/e^{-x} = e^{2x}.$$

iv) Τα -1 και 2 (που αλλάζουν τύπο οι συναρτήσεις) χωρίζουν την ευθεία των πραγματικών σε τρία μέρη, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f(x)		x-1	x-1	3x+2
g(x)		2x-3	4-7x	4-7x
(f+g)(x)		3x-4	-6x+3	-4x+6
(fg)(x)		(x-1)(2x-3)=2x ² -5x+3	(x-1)(4-7x)=-7x ² +11x-4	(3x+2)(4-7x)=-21x ² -2x+8
(f/g)(x)		(x-1)/(2x-3)	(x-1)/(4-7x)	(3x+2)/(4-7x)

$$\text{Άρα } (f+g)(x) = \begin{cases} 3x-4, & \text{αν } x \leq -1 \\ -6x+3, & \text{αν } -1 < x \leq 2 \\ -4x+6, & \text{αν } x > 2 \end{cases}, (fg)(x) = \begin{cases} 2x^2-5x+3, & \text{αν } x \leq -1 \\ -7x^2+11x-4, & \text{αν } -1 < x \leq 2 \\ -21x^2-2x+8, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \text{ και}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2x-3}, & \text{αν } x \leq -1 \\ \frac{x-1}{4-7x}, & \text{αν } -1 < x \leq 2 \text{ και } x \neq \frac{4}{7} \\ \frac{3x+2}{4-7x}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

v) $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ και επειδή $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in D_g$, ($x^2+x+1 \neq 0$, γιατί $\Delta = -3 < 0$) θα είναι $D_{f+g} = D_{fg} = D_{f/g} = \mathbb{R} - \{1\}$ και έχουν τύπους:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1} + \frac{x^2+x+1}{1-x},$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+x+1}{1-x} = -\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x-1} = -\frac{x^2+1}{(x-1)^2} \text{ και}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x^2+1}{x^3-1}}{\frac{x^2+x+1}{1-x}} = -\frac{\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}}{\frac{x^2+x+1}{x-1}} = -\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

vi) $D_f = \mathbb{R} - \{-1, -3\}$ και $D_g = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$ οπότε $D_{f+g} = D_{fg} = D_{f/g} = \mathbb{R} - \{-1, -2, -3\}$ και έχουν τύπους:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{|x+2|-1} - \frac{1}{x^2+3x+2}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x) = -\frac{1}{x^2+3x+2} \cdot \frac{1}{|x+2|-1}$$

$$\text{και } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -\frac{x^2+3x+2}{|x+2|-1}.$$

vii) Είναι $D_f = [-1, +\infty)$, $D_g = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ και επομένως $D_{f+g} = D_{fg} = [0, +\infty)$ και $D_{f/g} = (0, +\infty)$, αφού $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x},$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x^2+x} \text{ και}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x(x+1)}} = \sqrt{\frac{1}{x}}.$$



viii) $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ και $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ οπότε $D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$$\text{και } D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x/g(x)=0\} =$$

$$= D_f \cap D_g - \{x/\frac{x+2}{x-2}=0\} =$$

$$= D_f \cap D_g - \{x/x+2=0\} =$$

$$= D_f \cap D_g - \{x/x=-2\} =$$

= $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ και έχουν τύπους:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x^2-4}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{1+(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+4x+5}{x^2-4},$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\frac{1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x-2}=\frac{\cancel{x+2}}{(x-2)^2\cancel{(x+2)}}=\frac{1}{(x-2)^2} \text{ και}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{1}{x^2-4}}{\frac{x+2}{x-2}}=\frac{1}{\cancel{x+2}(x+2)}\cdot\frac{x-2}{\cancel{x-2}}=\frac{1}{(x+2)^2}.$$

ix) Είναι $D_f=[-4,4]$, $D_g=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$ και επομένως $D_{f+g}=D_{fg}=\{4,-4\}$ και

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0$ και $(fg)(x)=f(x)g(x)=0$ (γιατί ;)

Η $(f/g)(x)$ δεν ορίζεται, γιατί $D_{f/g}=\emptyset$.



15. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 100 μονάδες. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου, δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=50x-x^2$, όπου x η μια εκ των δυο διαστάσεων του ορθογωνίου, με $0 < x < 50$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \Pi=100 &\Leftrightarrow 2x+2y=100 \\ &\Leftrightarrow x+y=50 \\ &\Leftrightarrow y=50-x \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$E=xy \stackrel{(1)}{\Rightarrow} E=x(50-x)=50x-x^2.$$

Άρα $E(x)=50x-x^2$.

$$y > 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 50-x > 0 \Leftrightarrow x < 50 \text{ και επειδή } x > 0, \text{ θα έχουμε } 0 < x < 50.$$

16. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 25 τετραγωνικές μονάδες. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του ορθογωνίου, δίνεται από την συνάρτηση $\Pi(x)=\frac{2x^2+50}{x}$, $x > 0$, όπου x η μια εκ των δυο διαστάσεων του ορθογωνίου.

Λύση:

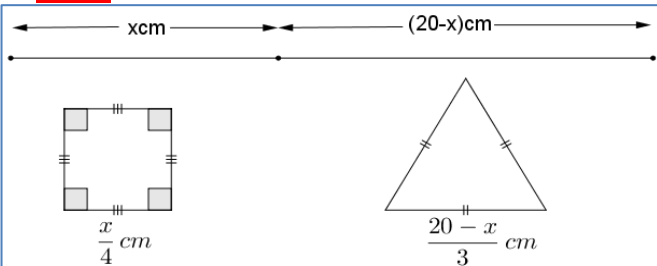
$$\begin{aligned} E=25 &\Leftrightarrow xy=25 \\ &\Leftrightarrow y=\frac{25}{x} \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\Pi=2x+2y \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Pi=2x+\frac{50}{x}=\frac{2x^2+50}{x}.$$

Προφανώς $x > 0$.

17. Ένα σύρμα μήκους 20cm, κόβεται σε δυο κομμάτια. Με το πρώτο κομμάτι μήκους x cm, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο κομμάτι, κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δυο κατασκευών, δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=\frac{9x^2+4(20-x)^2\sqrt{3}}{144}$, $0 < x < 20$.

Λύση:



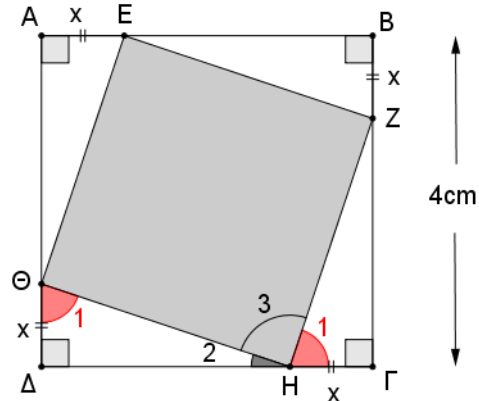
$$E_{ολ}=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{\left(\frac{20-x}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dots=\frac{9x^2+4(20-x)^2\sqrt{3}}{144}.$$

18. Στις πλευρές $AB, BG, \Gamma\Delta$ και ΔA τετραγώνου $A-B\Gamma\Delta$ πλευράς 4cm, παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα $AE=BZ=\Gamma H=\Delta\Theta=x$ cm. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του σχήματος $EZH\Theta$, δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=2x^2-8x+16$, $0 < x < 4$.

Λύση:

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AEO, EBZ, Z\Gamma H$ και $H\Delta\Theta$ είναι ίσα γιατί $AE=BZ=\Gamma H=\Delta\Theta=x$ cm, $BE=\Gamma Z=\Delta H=A\Theta=(4-x)$ cm.

Άρα $EZ=ZH=H\Theta=\Theta E$ και το τετράπλευρο $E-ZH\Theta$ είναι ρόμβος.



$$\text{Επίσης } \widehat{H}_1+\widehat{H}_2=\widehat{\Theta}_1+\widehat{H}_2=90^\circ.$$

Από τα ίσα τρίγωνα.

Άρα $\widehat{H}_3=90^\circ$ και το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι τετράγωνο.

$$\begin{aligned} (EZH\Theta) &= (EZ)^2 \\ &= (EB)^2+(BZ)^2 \\ &= (4-x)^2+x^2 \\ &= 16-8x+x^2+x^2 \\ &= 2x^2-8x+16. \end{aligned}$$

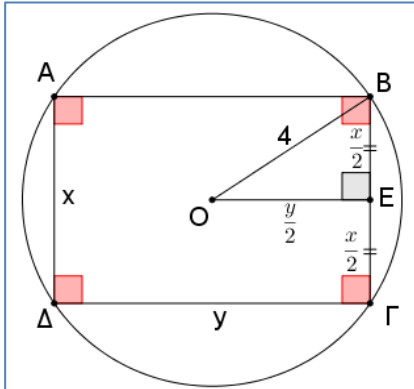
Π.Θ. στο τρίγωνο EBZ.

$$\text{Άρα } E(x)=2x^2-8x+16, 0 < x < 4.$$

19. Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $r=4$, εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Εάν η μια από τις δυο διαστάσεις του ορθογωνίου είναι x , να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται σε συνάρτηση με το x , από τη σχέση $E(x)=x\sqrt{64-x^2}$, $0 < x < 8$.

Λύση:

Έστω $AD=BG=x$ και $AB=ΓΔ=y$.
 Από το κέντρο O φέρνουμε $OE \perp BG$.
 Τότε $BE=EG=x/2$ και $OE=y/2$.
 Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τρίγωνο OEB :



$$(OB)^2 = (BE)^2 + (OE)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{64 - x^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$(ABΓΔ) = xy \xrightarrow{(1)} (ABΓΔ) = x\sqrt{64 - x^2}$$

Άρα $E(x) = x\sqrt{64 - x^2}$, με $0 < x < 8$, γιατί $x > 0$ ως πλευρά ορθογώνιου και $x < 8$ γιατί η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου είναι η διάμετρος $\delta = 8\text{cm}$.

20. Ένα σύρμα μήκους 40cm, κόβεται σε δυο κομμάτια. Με το πρώτο κομμάτι κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς $x\text{cm}$ και με το δεύτερο κομμάτι κατασκευάζουμε κύκλο.

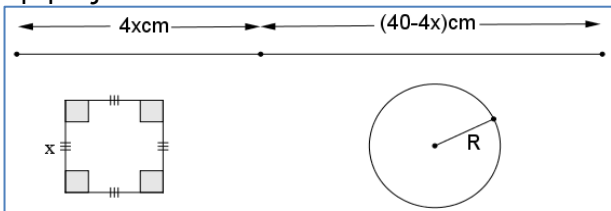
i. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα R του κύκλου, δίνεται από τη συνάρτηση $R(x) = \frac{2(10-x)}{\pi}$, $0 < x < 10$.

ii. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών του τετραγώνου και του κύκλου, δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 80x + 400}{\pi}$, $0 < x < 10$.

Λύση:

Το πρώτο κομμάτι έχει μήκος $4x\text{cm}$ και το δεύτερο $(40-4x)\text{cm}$.

Η ακτίνα R του κύκλου, θα υπολογιστεί από το μήκος L του κύκλου:



$$L = 40 - 4x \Leftrightarrow 2\pi R = 40 - 4x$$

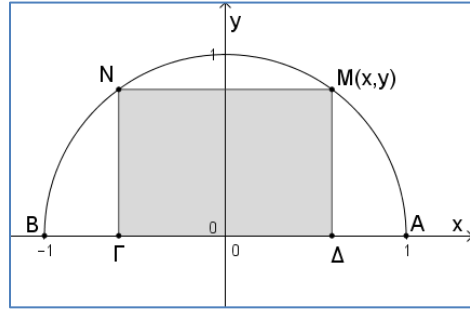
$$\Leftrightarrow R = \frac{20 - 2x}{\pi} \dots \dots \dots (10)$$

$$E_{\text{ολ}} = x^2 + \pi R^2 \xrightarrow{(1)} E_{\text{ολ}} = x^2 + \pi \left(\frac{20 - 2x}{\pi}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow E_{\text{ολ}}(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 80x + 400}{\pi}$$

Προφανώς $x > 0$ και $4x < 40 \Leftrightarrow x < 10$.
 Άρα $0 < x < 10$.

21. Σε ημικύκλιο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1, που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, εγγράφουμε ορθογώνιο $MNΓΔ$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E και η περίμετρος Π του ορθογώνιου $MNΓΔ$ δίνονται από τις σχέσεις $E(y) = 2y\sqrt{1 - y^2}$, και $\Pi(y) = 2y + 4\sqrt{1 - y^2}$, όπου y η τεταγμένη του τυχαίου σημείου M του ημικυκλίου, με $0 < y < 1$.

Λύση:

Ο κύκλος έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 - y^2} \dots \dots \dots (1)$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$(MNΓΔ) = (\GammaΔ) \cdot (MΔ)$$

$$= |2x| \cdot y \dots \dots \dots \text{γιατί } y > 0$$

$$= |\pm 2\sqrt{1 - y^2}| \cdot y \dots \dots \dots \text{λόγω της (1)}$$

$$= 2y\sqrt{1 - y^2}, \text{ με } 0 < y < 1.$$

Η ζητούμενη περίμετρος είναι:

$$\Pi = 2(\GammaΔ) + 2(MΔ)$$

$$= 4|x| + 2|y|$$

$$= 4\sqrt{1 - y^2} + 2y \dots \dots \dots \text{γιατί } y > 0$$

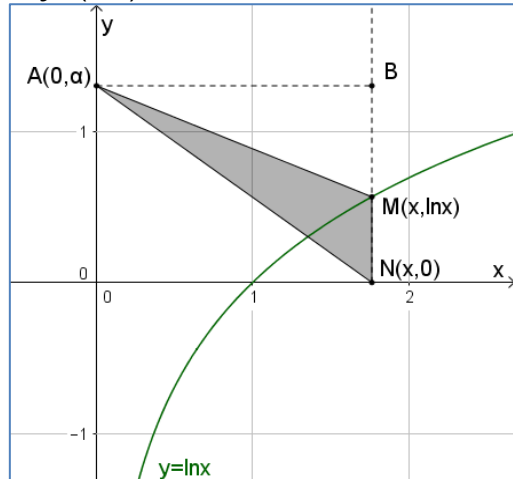
$$\text{Άρα } \Pi(y) = 2y + 4\sqrt{1 - y^2}, \text{ με } 0 < y < 1.$$

22. Έστω $M(x,y)$, $x > 1$, σημείο που κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Εάν N η προβολή του M στον άξονα $x'x$ και $A(0,\alpha)$ τυχαίο σημείο του άξονα $y'y$, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου AMN δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2} x \ln x$, $x > 1$.

Λύση:

$$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow \ln x > 0.$$

Τα σημεία M και N έχουν συντεταγμένες $M(x, \ln x)$ και $N(x, 0)$, ενώ το A , έχει συντεταγμένες $A(0, \alpha)$.



$$E = \frac{1}{2}(MN) \cdot (AB) = \frac{1}{2} |\ln x| \cdot |x|$$

$$= \frac{1}{2} \ln x \cdot x$$

γιατί $x > 1 > 0$ και $\ln x > 0$.

Άρα $E(x) = \frac{1}{2} x \ln x, x > 1$.

23. Το κόστος για την παραγωγή x μονάδων μιας βιομηχανικής παραγωγής, δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 60x - 1500$, με $x \geq 25$ και τα έσοδα από την πώληση των x μονάδων, δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2 - 20x$. Να εκφράσετε το κέρδος ως συνάρτηση του x και να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{N}$, η βιομηχανία κερδίζει.

Λύση:

Εάν $P(x)$ το κέρδος, τότε:

$$P(x) = E(x) - K(x)$$

$$= x^2 - 20x - (60x - 1500)$$

$$= x^2 - 80x + 1500.$$

Η βιομηχανία κερδίζει, όταν

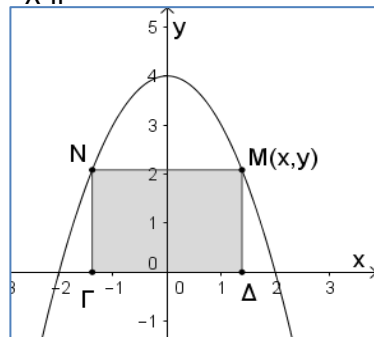
$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 80x + 1500 > 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\Delta = 400 \text{ και } x_1 = 30, x_2 = 50.$$

x	$-\infty$	25	30	50	$+\infty$
$x^2 - 80x + 1500$		+	0	-	0

Άρα (1) $\Leftrightarrow 25 \leq x < 30$ ή $x > 50$ μονάδες.

24. Σημείο $M(x,y)$, $0 < x < 2$, κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4 - x^2$. Εγγράφουμε σε αυτή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $MN\Gamma\Delta$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να δείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = 8x - 2x^3, 0 < x < 2.$$

Λύση:

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια (?), έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Επομένως το συμμετρικό $N(-x,y)$, τυχαίου σημείου $M(x,y)$ της γραφικής της παράστασης, ως προς τον άξονα $y'y$, είναι επίσης σημείο της γραφικής παράστασης.

Άρα $\Gamma(-x,0)$ και $\Delta(x,0)$.

$(\Gamma\Delta) = 2|x| = 2x \dots \dots \dots$ γιατί $x > 0$.

$(M\Delta) = |y| = |4 - x^2| = 4 - x^2 \dots \dots$ γιατί $0 < x < 2$.

$(MN\Gamma\Delta) = (\Gamma\Delta) \cdot (M\Delta) = 2x(4 - x^2)$
 $= 8x - 2x^3, 0 < x < 2.$

25. Κύλινδρος έχει άθροισμα ύψους και διαμέτρου 20cm. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του, δίνεται από τη συνάρτηση $V(\rho) = 20\rho^2 - 2\rho^3$, όπου ρ η

ακτίνα της βάσης, με $0 < \rho < 10\text{cm}$ και η ολική του επιφάνεια, δίνεται από τη συνάρτηση $E_{ολ}(\rho) = 2\pi\rho(20 - \rho)$.

Λύση:

$$2\rho + h = 20 \Leftrightarrow h = 20 - 2\rho.$$

$$V = \pi\rho^2 h$$

$$= \pi\rho^2(20 - 2\rho)$$

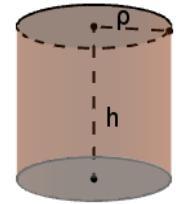
$$= 20\pi\rho^2 - 2\pi\rho^3.$$

Επίσης $h > 0 \Leftrightarrow 20 - 2\rho > 0$
 $\Leftrightarrow 0 < \rho < 10\text{cm}.$

Άρα $V(\rho) = 20\pi\rho^2 - 2\pi\rho^3$, με $0 < \rho < 10\text{cm}.$

Επίσης $E_{ολ} = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho h$
 $= 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho(20 - 2\rho)$
 $= 2\pi\rho^2 + 40\pi\rho - 4\pi\rho^2$
 $= 40\pi\rho - 2\pi\rho^2$
 $= 2\pi\rho(20 - \rho).$

Άρα $E_{ολ}(\rho) = 2\pi\rho(20 - \rho).$



26. Κύλινδρος έχει όγκο 1Lit (=1.000cm³). Να αποδείξετε ότι η ολική του επιφάνεια, δίνεται από τη συνάρτηση $E_{ολ}(\rho) = \frac{2\pi\rho^3 + 2.000}{\rho}$ cm², όπου ρ η ακτίνα της βάσης του.

Λύση:

$$V = \pi\rho^2 h \Leftrightarrow 1.000 = \pi\rho^2 h$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{1.000}{\pi\rho^2}.$$

$$E_{ολ} = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho h = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho \frac{1.000}{\pi\rho^2}$$

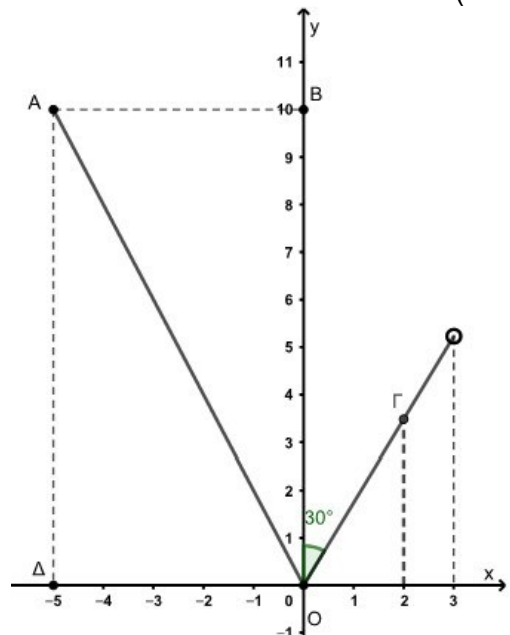
$$= 2\pi\rho^2 + \frac{2.000}{\rho} = \frac{2\pi\rho^3 + 2.000}{\rho}.$$

27. 26603-2: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ; (Μονάδες 5)



Λύση:

α) Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f αποτελεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Από τη γραφική παράσταση του σχήματος παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[-5,3)$. Αντίστοιχα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f , δηλαδή το κλειστό διάστημα $[0,10]$.

β) Για $x \in [-5,0]$, η γραφική παράσταση της f αποτελεί τμήμα που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(-5,10)$. Η ευθεία αυτή έχει εξίσωση της μορφής $y=ax$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(-5,10)$ θα ισχύει $10=a(-5)$, οπότε $a=-2$.

Άρα για $x \in [-5,0]$ είναι $f(x) = -2x$.

Για $x \in (0,3)$, η γραφική παράσταση της f αποτελεί τμήμα που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα x γωνία 60° . Η κλίση της ευθείας αυτής είναι ίση με $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, οπότε για $x \in (0,3)$, $f(x) = \sqrt{3}x$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{αν } x \in [-5,0] \\ \sqrt{3}x, & \text{αν } x \in (0,3) \end{cases}$.

γ) Η τετμημένη του σημείου Γ είναι $2 \in (0,3)$. Για $x=2$ στον τύπο της συνάρτησης $y = \sqrt{3}x$ έχουμε $y=2\sqrt{3}$. Άρα $\Gamma(2, 2\sqrt{3})$.

28. 26604-4: Δυο εταιρείες E_1 και E_2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία E_1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η E_2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

α) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E_1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:

i. Τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

ii. Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία E_1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό.

(Μονάδες 2)

iii. Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρηση του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε; (Μονάδες 2)

β) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E_2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(Μονάδες 3)

γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρηση τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό; (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E_1 ; (Μονάδες 6)

Λύση:

α) Η εταιρεία E_1 κοστολογεί με 200 ευρώ κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα. Για x μέτρα βάθους το κόστος θα είναι $200x$ αυξημένο κατά 1500 ευρώ που είναι το κόστος της εκπόνησης της μελέτης, όταν $0 \leq x \leq 15$. Αν όμως χρειαστεί να ξεπεράσει τα 15 μέτρα βάθους τότε θα χρειαστεί να πληρώσει $(x-15)250$ για κάθε επιπλέον μέτρο μετά τα 15 πρώτα και $15 \cdot 200 + 1500 = 4500$ ευρώ που είναι η χρέωση των 15 πρώτων μέτρων βάθους. Έτσι σε αυτή την περίπτωση το κόστος θα είναι $(x-15)250 + 4500$ ευρώ για γεώτρηση x μέτρων βάθους με $x > 15$. Οπότε

$$i. f(x) = \begin{cases} 1500 + 200x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 15 \\ (x-15)250 + 4500, & \text{αν } x > 15 \end{cases}$$

ii. Για 12 μέτρα βάθους γεώτρηση το ποσό που θα δαπανήσει είναι $f(12) = 1500 + 200 \cdot 12 = 3900$ ευρώ.

iii. Μέχρι τα 15m βάθους το ποσό που χρεώνει η εταιρεία είναι 4500 ευρώ. Οπότε $x > 15$. Έτσι έχουμε $f(x) = 5050$ ή $(x-15)250 + 4500 = 5050$ ή $x = 17,2m$.

β) $g(x) = 300x$ με $x > 0$.

γ) Δίνεται ότι για ίδια μέτρα βάθους πλήρωσαν το ίδιο ποσό. Αναζητούμε τιμή του x ώστε να ισχύει:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1500 + 200x = 300x$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ δεκτή (όταν } 0 < x \leq 15)$$

$$\text{ή } f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-15)250 + 4500 = 300x$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ απορρίπτεται (όταν } x > 15).$$

Άρα για γεώτρηση βάθους 15 μέτρων οι δύο εταιρείες χρεώνουν ακριβώς το ίδιο ποσό και δεν υπάρχει άλλη τιμή του x (μέτρα βάθους) για την οποία η χρέωση των δυο εταιρειών, για το ίδιο βάθος, να είναι ίδια.

δ) Για να συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E_1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, θα πρέπει το κόστος $f(x)$ να είναι μικρότερο από το αντίστοιχο κόστος $g(x)$ της εταιρείας E_2 . Δηλαδή να ισχύει $f(x) < g(x)$, οπότε :

• Για $0 < x \leq 15$, $1500 + 200x < 300x \Leftrightarrow x > 15$ απορρίπτεται.

• Για $x > 15$, $(x-15)250 + 4500 < 300x \Leftrightarrow x > 15$, δηλαδή συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E_1 όταν η γεώτρηση έχει περισσότερο από 15 μέτρα βάθους.

29. 26637-2: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$. Μονάδες 9

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$. Μονάδες 9

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). Μονάδες 7

Λύση:

α) Προφανώς $A_f = [0, +\infty)$ και $A_g = (0, +\infty)$, οπότε $A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g = [0, +\infty) \cap (0, +\infty) = (0, +\infty)$ και έχει τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x} \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο:

$$\begin{aligned} A_f \cap A_g - \{x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\} &= \{x \in (0, +\infty) / \ln x \neq 0\} \\ &= \{x \in (0, +\infty) / \ln x \neq \ln 1\} \\ &= \{x \in (0, +\infty) / x \neq 1\} \\ &= (0, 1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

και έχει τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$

προσδιορίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) &\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} (\ln^2 x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} (\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -1 \text{ ή } \ln x = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \text{ ή } \ln x = \ln e \\ &\Leftrightarrow x = e^{-1} \text{ ή } x = e. \end{aligned}$$

$x > 0$

30. 29830-2: Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \text{ και } g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$. (Μονάδες 7)

ii. $\frac{f}{g}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Για τη συνάρτηση f είναι $9 - x^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x^2 \leq 9$
 $\Leftrightarrow |x| \leq 3$
 $\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

οπότε $A_f = [-3, 3]$.

Για τη συνάρτηση g είναι $4 - x^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow |x| \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

και $x \neq 0$,

οπότε $A_g = [-2, 0) \cup (0, 2]$.

β) i. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο δύο συναρτήσεων ορίζεται στην τομή των πεδίων ορισμού τους, οπότε $A_{f \cdot g} = [-3, 3] \cap ([-2, 0) \cup (0, 2])$

$$= [-2, 0) \cup (0, 2].$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$= \sqrt{9 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}.$$

ii. Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο δύο συναρτήσεων ορίζεται στην τομή των πεδίων ορισμού τους, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$. Λόγω του ερωτήματος (β, i) η τομή των πεδίων ορισμού είναι

$$A_f \cap A_g = [-2, 0) \cup (0, 2]$$

και $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Επομένως $A_{\frac{f}{g}} = A_f \cap A_g - \{\pm 2\}$

$$= (-2, 0) \cup (0, 2).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

31. END.



